

Klausur zu
Höhere Mathematik I
BNUW
SoSe 2022

Gesamtzahl der Aufgaben: 6, Gesamtpunktzahl: 60, Bearbeitungszeit: 120 Minuten

1. (10 Punkte)

a) Berechnen Sie für die Vektoren

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{y} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

die folgenden Ausdrücke.

i) $2\mathbf{x} - 3\mathbf{y}$

ii) $\|\mathbf{x}\|$

iii) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$

iv) $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$

Lösung: $2\mathbf{x} - 3\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \|\mathbf{x}\| = \sqrt{14}, \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \frac{5}{3}, \quad \mathbf{x} \times \mathbf{y} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) Gegeben ist die Ebene

$$E: \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

i) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Ebene E .

ii) Entscheiden Sie rechnerisch, ob der Punkt $P = (1, 0, 0)$ in der Ebene E liegt.

Lösung: $E: \langle \mathbf{r}, \mathbf{n} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$ mit $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, der Punkt P liegt nicht in der Ebene E .

c) Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☒ Falsch Die Menge $\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \left\| \mathbf{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| < 1 \right\}$ enthält den Nullvektor.

☒ Wahr ☐ Falsch Es gilt $(-\infty, 1) \cap [-5, 2] = [-5, 1)$.

2. (10 Punkte)

a) Untersuchen Sie, ob die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{(-1)^n (1+n) \sqrt[n]{12}}{n^2}$$

konvergiert. Falls ein Grenzwert existiert, geben Sie diesen an. Falls kein Grenzwert existiert, geben Sie an, ob die Folge bestimmt gegen $+\infty$ oder $-\infty$ divergiert oder ob sie unbestimmt divergent ist.

Lösung: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

b) Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{2n+1}{n+1}.$$

Zeigen Sie, dass die Folge streng monoton wachsend ist.

Lösung: $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0$

c) Berechnen Sie

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{2k}}{5^{k-3}}.$$

Lösung: $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{2k}}{5^{k-3}} = 5^2 \cdot 4^2 = 400$.

d) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☒ Falsch Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ besitzt das Infimum $\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n = 1$.

☐ Wahr ☒ Falsch Streng monoton fallende Folgen sind immer konvergent.

3. (10 Punkte)

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich D von

$$g : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{2 \cos(\sqrt{x})}{9 - x^2}.$$

Lösung: $D = \mathbb{R}_0^+ \setminus \{3\}$

b) Bestimmen Sie die Funktionsvorschrift der Verkettung $h \circ k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der Funktionen

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = xe^x \quad \text{und} \quad k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad k(x) = x^2 + 1.$$

Lösung: $(h \circ k)(x) = (x^2 + 1)e^{x^2+1}$

c) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 5}{x^2 - 1} \quad \text{und} \quad \lim_{x \nearrow 1} \frac{x + 1}{x^2 - 1}$$

Lösung: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 5}{x^2 - 1} = 2, \quad \lim_{x \nearrow 1} \frac{x + 1}{x^2 - 1} = -\infty$

d) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion

$$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln\left(x^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Lösung: $f'(x) = -\frac{1}{2x} < 0$ für $x > 0$, d. h. f ist streng monoton fallend

e) Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☒ Falsch Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad f(x) = (x + 1)^4$ ist injektiv.

☒ Wahr ☐ Falsch Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad f(x) = e^{-x}$ ist umkehrbar.

4. (13 Punkte)

a) Gegeben ist die Funktion $f : [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sqrt{16 - x^2}.$$

- i) Bestimmen Sie die lokalen Extremalstellen der Funktion f und entscheiden Sie, ob es sich um lokale Minimal- oder Maximalstellen handelt. Berechnen Sie die entsprechenden lokalen Minima bzw. Maxima.
- ii) Entscheiden Sie, ob f globale Extremalstellen besitzt und geben Sie diese gegebenenfalls an.

Lösung:

i) $x = 0$ ist echte lokale Maximalstelle. Maximum ist $f(0) = 4$.

$x = -4$ und $x = 4$ sind echte lokale Minimalstellen, Minimum ist jeweils $f(\pm 4) = 0$.

ii) $x = -4$ und $x = 4$ sind globale Minimalstellen, $x = 0$ ist globale Maximalstelle.

b) Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\ln(x^2)}{\frac{1}{x^2}}.$$

Berechnen Sie

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

Lösung: Mit de l'Hospital: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

c) Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☒ Wahr ☐ Falsch Die Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 \cos(2x)$ ist gerade.

☐ Wahr ☒ Falsch Die Cotangensfunktion hat den Definitionsbereich $\mathbb{R}$.

5. (8 Punkte)

a) Berechnen Sie das Taylor-Polynom 1. Grades der Funktion

$$f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin(\sqrt{x})$$

zur Entwicklungsstelle $x_0 = \pi^2$.

Lösung: $T_1(x; \pi^2) = -\frac{1}{2\pi}(x - \pi^2)$

b) Berechnen Sie den Konvergenzradius r der Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} (x-5)^k.$$

Lösung: $r = 1$

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr □ Falsch Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = |1 - x|$$

ist stetig aber nicht differenzierbar.

■ Wahr □ Falsch Ist $r = 2$ der Konvergenzradius einer Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-1)^k$, so liegt das Intervall $(-1, 3)$ im Konvergenzbereich dieser Potenzreihe.

6. (9 Punkte)

a) Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln(2x)}{x} dx$$

mithilfe der Substitution

$$x = h(t) = \frac{e^t}{2}.$$

Lösung: $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln(2x)}{x} dx = \frac{1}{2}(\ln(2))^2$

b) Führen Sie eine Partialbruchzerlegung der Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x+1}{(x+3)^2}$$

durch.

Lösung: $\frac{2x+1}{(x+3)^2} = \frac{2}{x+3} - \frac{5}{(x+3)^2}$

c) Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☒ Falsch Die Funktion $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = 2^x$ ist eine Stammfunktion der Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x2^{x-1}$.

☐ Wahr ☒ Falsch Für eine integrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist

$$\int f(x) dx$$

eine reelle Zahl.