Klausur zu Höhere Mathematik I BNUW WiSe 2022/23

Gesamtzahl der Aufgaben: 6, Gesamtpunktzahl: 60, Bearbeitungszeit: 120 Minuten

1. (8 Punkte)

a) Geben Sie die Mengen

$$I_1 = \big((1,2) \cup [0,1]\big) \cap (0,2]$$

und

$$I_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid |x+1| \leq 2\}$$

als Intervalle an.

Lösung: $I_1 = (0,2)$, $I_2 = [-3,1]$

b) Berechnen Sie den Lotfußpunkt P^* des Punktes $P_1 = (1,0,-1)$ zur Geraden

$$g\colon \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Berechen Sie außerdem den Abstand a von P_1 zu g.

Lösung: $P^* = (0,1,3)$, $a = 3\sqrt{2}$

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ■ Falsch Es gilt $\sqrt{12} = 6\sqrt{2}$.

■ Wahr ☐ Falsch Es gilt $(n+1)! = (n+1)n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

2. (13 Punkte)

a) Berechnen Sie jeweils den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

i) $a_n = \dfrac{n^2-1}{2n^3+3}$ ii) $a_n = \left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n$

Lösung:

i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e^2$

b) Gegeben ist die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$b_n = 1 + \frac{(-1)^n}{2n}.$$

i) Zeigen Sie, dass $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ weder monoton wachsend noch monoton fallend ist.

Lösung:

$$b_{n+1} - b_n = \frac{(-1)^{n+1}(1+2n)}{2n(1+n)} \implies \begin{cases} b_{n+1} - b_n \geq 0 \text{ falls } n \text{ ungerade} \\ b_{n+1} - b_n \leq 0 \text{ falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

ii) Geben Sie Infimum, Supremum, Minimum und Maximum der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, falls diese existieren.

Lösung:

$$\min_{n\in\mathbb{N}} b_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} b_n = b_1 = \frac{1}{2}, \quad \max_{n\in\mathbb{N}} b_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} b_n = b_2 = \frac{5}{4}.$$

c) Berechnen Sie den Grenzwert der Reihe

$$\sum_{k=5}^{\infty} \frac{2^{3k-9}}{3^{2k-6}}.$$

Lösung: $\displaystyle\sum_{k=5}^{\infty} \frac{2^{3k-9}}{3^{2k-6}} = \frac{64}{9}.$

d) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort −1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ■ Falsch Die Folge $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ hat die beiden Grenzwerte −1 und +1.

■ Wahr ☐ Falsch Das Produkt einer beschränkten Folge und einer Nullfolge ist eine Nullfolge.

3. (12 Punkte)

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich D der Funktion

$$f\colon D \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{2\ln(x+1)}{2-x^2}.$$

Lösung: $D = (-1, \infty) \setminus \{\sqrt{2}\}$

b) Wir betrachten die Funktion

$$g\colon \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{x^3+1}{x^2+x}.$$

i) Entscheiden Sie ob g in $x = 0$ stetig fortsetzbar ist oder ob $x = 0$ eine Polstelle von g ist. Geben Sie im Fall einer Polstelle an, ob ein Pol mit oder ohne Vorzeichenwechsel vorliegt.

Lösung: $\lim_{x\nearrow 0} g(x) = -\infty$, $\lim_{x\searrow 0} g(x) = +\infty$. Damit ist $x = 0$ ein Pol mit Vorzeichenwechsel von g.

ii) Berechnen Sie $\lim_{x\to-\infty} g(x)$.

Lösung: $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$

iii) Berechnen Sie die Asymptote von g.

Lösung: $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) = x - 1$ ist Asymptote von g.

c) Wir betrachten die Funktionen

$$u\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad u(x) = 1 + \sqrt{x}$$

und

$$v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad v(x) = \sin(x)$$

mit den Wertebereichen

$$u([0,\infty)) = [1, \infty), \quad v(\mathbb{R}) = [-1, 1].$$

Entscheiden Sie jeweils ob die Verkettungen $u \circ v$ und $v \circ u$ existieren und geben Sie diese gegebenenfalls an.

Lösung: $u \circ v$ existiert nicht. $v \circ u\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $(v \circ u)(x) = \sin(1 + \sqrt{x})$.

d) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ■ Falsch Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to [1, \infty)$, $f(x) = x^2 + 1$ ist bijektiv.

☐ Wahr ■ Falsch Eine Polynomfunktion vom Grad $m \geq 1$ hat genau m reelle Nullstellen.

4. (11 Punkte)

a) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{2^x}{x}.$$

Lösung: $f'(x) = \dfrac{\ln(2)2^x \cdot x - 2^x}{x^2}$

b) Geben Sie für

$$f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

möglichst große Teilintervalle von $[-1,1]$ an, auf denen die Funktion streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist.

Lösung: f ist auf $[-1,0]$ streng monoton wachsend und auf $[0,1]$ streng monoton fallend.

c) Bestimmen Sie alle lokalen Extremalstellen von

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 e^{2x}$$

und entscheiden Sie jeweils ob eine lokale Maximal- oder eine lokale Minimalstelle vorliegt.

Lösung: $x = 0$ ist lokale Minimalstelle und $x = -1$ ist lokale Maximalstelle.

d) Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x\ln(x)}{x^2+1}.$$

Lösung: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x\ln(x)}{x^2+1} = 0$

e) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr ☐ Falsch Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ hat in $x = 0$ eine Sattelstelle.

☐ Wahr ■ Falsch Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ ist in $x = 0$ differenzierbar mit Tangente $T(x) = 0$.

5. (9 Punkte)

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^2 xe^x \, dx$$

mit partieller Integration.

Lösung: $\displaystyle\int_0^2 xe^x \, dx = e^2 + 1$

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int \frac{1}{(\frac{x}{2}-1)^2} \, dx$$

mit der Substitution

$$x = h(t) = 2t + 2.$$

Lösung: $\displaystyle\int \frac{1}{(\frac{x}{2}-1)^2} \, dx = -\frac{4}{x-2} + c$

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr ☐ Falsch Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{1}{x^2(x^2+1)}$$

lautet

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

■ Wahr ☐ Falsch Mit dem unbestimmten Integral $\int f(x)\,dx$ wird die Menge aller Stammfunktionen von f bezeichnet.

6. (7 Punkte)

a) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom 2. Ordnung in $x_0 = 0$ der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \cos(x)^2\,.$$

Lösung: $T_2(x; 0) = 1 - x^2$.

b) Berechnen Sie mit Hilfe der geometrischen Reihe die Taylor-Reihe der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{2 + 8x^2}$$

im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Lösung: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n}{2} x^{2n},\ |x| < \frac{1}{2}$

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ■ Falsch Es gilt

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

☐ Wahr ■ Falsch Wenn $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine unendlich oft differenzierbare Funktion ist, so hat die Taylorreihe von f den Konvergenzradius $r = \infty$.