Nachname:

Vorname:

Matrikelnummer:

Klausur zu Höhere Mathematik I BNUW WiSe 2022/23

Gesamtzahl der Aufgaben: 6, Gesamtpunktzahl: 60, Bearbeitungszeit: 120 Minuten

1. (8 Punkte)
   a) Geben Sie die Mengen
   $$I_1 = \big((1,2) \cup [0,1]\big) \cap (0,2]$$
   und
   $$I_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid |x+1| \leq 2\}$$
   als Intervalle an.

   b) Berechnen Sie den Lotfußpunkt P^* des Punktes $P_1 = (1,0,-1)$ zur Geraden
   $$g\colon \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$
   Berechen Sie außerdem den Abstand a von P_1 zu g.

   c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort $+1$ Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

   Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

   ☐ Wahr ☐ Falsch Es gilt $\sqrt{12} = 6\sqrt{2}$.

   ☐ Wahr ☐ Falsch Es gilt $(n+1)! = (n+1)n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

2. (13 Punkte)
   a) Berechnen Sie jeweils den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   i) $a_n = \dfrac{n^2-1}{2n^3+3}$ ii) $a_n = \left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n$

   b) Gegeben ist die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit
   $$b_n = 1 + \frac{(-1)^n}{2n}.$$
   i) Zeigen Sie, dass $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ weder monoton wachsend noch monoton fallend ist.

   ii) Geben Sie Infimum, Supremum, Minimum und Maximum der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, falls diese existieren.

c) Berechnen Sie den Grenzwert der Reihe

$$\sum_{k=5}^{\infty} \frac{2^{3k-9}}{3^{2k-6}}.$$

d) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☐ Falsch Die Folge $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ hat die beiden Grenzwerte -1 und $+1$.

☐ Wahr ☐ Falsch Das Produkt einer beschränkten Folge und einer Nullfolge ist eine Nullfolge.

3. (12 Punkte)

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich D der Funktion

$$f\colon D \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{2\ln(x+1)}{2-x^2}.$$

b) Wir betrachten die Funktion

$$g\colon \mathbb{R}\setminus\{-1,0\} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{x^3+1}{x^2+x}.$$

i) Entscheiden Sie ob g in $x=0$ stetig fortsetzbar ist oder ob $x=0$ eine Polstelle von g ist. Geben Sie im Fall einer Polstelle an, ob ein Pol mit oder ohne Vorzeichenwechsel vorliegt.

ii) Berechnen Sie $\lim_{x\to-\infty} g(x)$.

iii) Berechnen Sie die Asymptote von g.

c) Wir betrachten die Funktionen

$$u\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad u(x) = 1+\sqrt{x}$$

und

$$v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad v(x) = \sin(x)$$

mit den Wertebereichen

$$u([0,\infty)) = [1,\infty), \quad v(\mathbb{R}) = [-1,1].$$

Entscheiden Sie jeweils ob die Verkettungen $u\circ v$ und $v\circ u$ existieren und geben Sie diese gegebenenfalls an.

d) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☐ Falsch Die Funktion $f\colon \mathbb{R}\to[1,\infty)$, $f(x)=x^2+1$ ist bijektiv.

☐ Wahr ☐ Falsch Eine Polynomfunktion vom Grad $m\geq 1$ hat genau m reelle Nullstellen.

4. (11 Punkte)

a) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x) = \frac{2^x}{x}.$$

b) Geben Sie für
$$f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{1-x^2}$$
möglichst große Teilintervalle von $[-1,1]$ an, auf denen die Funktion streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist.

c) Bestimmen Sie alle lokalen Extremalstellen von
$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 e^{2x}$$
und entscheiden Sie jeweils ob eine lokale Maximal- oder eine lokale Minimalstelle vorliegt.

d) Berechnen Sie den Grenzwert
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x\ln(x)}{x^2+1}.$$

e) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☐ Falsch Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ hat in $x = 0$ eine Sattelstelle.

☐ Wahr ☐ Falsch Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ ist in $x = 0$ differenzierbar mit Tangente $T(x) = 0$.

5. (9 Punkte)

a) Berechnen Sie das Integral
$$\int_0^2 xe^x\,dx$$
mit partieller Integration.

b) Berechnen Sie das Integral
$$\int \frac{1}{(\frac{x}{2}-1)^2}\,dx$$
mit der Substitution
$$x = h(t) = 2t + 2.$$

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☐ Falsch Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung von
$$\frac{1}{x^2(x^2+1)}$$
lautet
$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

☐ Wahr ☐ Falsch Mit dem unbestimmten Integral $\int f(x)\,dx$ wird die Menge aller Stammfunktionen von f bezeichnet.

6. (7 Punkte)

a) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom 2. Ordnung in $x_0 = 0$ der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \cos(x)^2 .$$

b) Berechnen Sie mit Hilfe der geometrischen Reihe die Taylor-Reihe der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{2 + 8x^2}$$

im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☐ Falsch Es gilt

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

☐ Wahr ☐ Falsch Wenn $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine unendlich oft differenzierbare Funktion ist, so hat die Taylorreihe von f den Konvergenzradius $r = \infty$.