

Klausur zu
Höhere Mathematik I
Maschinenbau
WiSe 2022/23

Gesamtzahl der Aufgaben: 6, Gesamtpunktzahl: 60, Bearbeitungszeit: 120 Minuten

1. (8 Punkte)

a) Geben Sie die Mengen

$$I_1 = ((1, 2) \cup [0, 1]) \cap (0, 2]$$

und

$$I_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid |x + 1| \leq 2\}$$

als Intervalle an.

Lösung: $I_1 = (0, 2)$, $I_2 = [-3, 1]$

b) Berechnen Sie den Lotfußpunkt P^* des Punktes $P_1 = (1, 0, -1)$ zur Geraden

$$g: \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie außerdem den Abstand a von P_1 zu g .

Lösung: $P^* = (0, 1, 3)$, $a = 3\sqrt{2}$

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☒ Falsch Es gilt $\sqrt{12} = 6\sqrt{2}$.

☒ Wahr ☐ Falsch Es gilt $(n + 1)! = (n + 1)n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

2. (13 Punkte)

a) Berechnen Sie jeweils den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

i) $a_n = \frac{n^2 - 1}{2n^3 + 3}$

ii) $a_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$

Lösung:

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^2$

b) Gegeben ist die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$b_n = 1 + \frac{(-1)^n}{2n}.$$

i) Zeigen Sie, dass $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ weder monoton wachsend noch monoton fallend ist.

Lösung:

$$b_{n+1} - b_n = \frac{(-1)^{n+1}(1+2n)}{2n(1+n)} \implies \begin{cases} b_{n+1} - b_n \geq 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ b_{n+1} - b_n \leq 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

ii) Geben Sie Infimum, Supremum, Minimum und Maximum der Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ an, falls diese existieren.

Lösung:

$$\min_{n \in \mathbb{N}} b_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} b_n = b_1 = \frac{1}{2}, \quad \max_{n \in \mathbb{N}} b_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} b_n = b_2 = \frac{5}{4}.$$

c) Berechnen Sie den Grenzwert der Reihe

$$\sum_{k=5}^{\infty} \frac{2^{3k-9}}{3^{2k-6}}.$$

Lösung: $\sum_{k=5}^{\infty} \frac{2^{3k-9}}{3^{2k-6}} = \frac{64}{9}.$

d) Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☒ Falsch Die Folge $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ hat die beiden Grenzwerte -1 und +1.

☒ Wahr ☐ Falsch Das Produkt einer beschränkten Folge und einer Nullfolge ist eine Nullfolge.

3. (12 Punkte)

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich D der Funktion

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{2 \ln(x+1)}{2-x^2}.$$

Lösung: $D = (-1, \infty) \setminus \{\sqrt{2}\}$

b) Wir betrachten die Funktion

$$g: \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 + x}.$$

i) Entscheiden Sie ob g in $x = 0$ stetig fortsetzbar ist oder ob $x = 0$ eine Polstelle von g ist. Geben Sie im Fall einer Polstelle an, ob ein Pol mit oder ohne Vorzeichenwechsel vorliegt.

Lösung: $\lim_{x \nearrow 0} g(x) = -\infty$, $\lim_{x \searrow 0} g(x) = +\infty$. Damit ist $x = 0$ ein Pol mit Vorzeichenwechsel von g .

ii) Berechnen Sie $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

Lösung: $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$

iii) Berechnen Sie die Asymptote von g .

Lösung: $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $p(x) = x - 1$ ist Asymptote von g .

c) Wir betrachten die Funktionen

$$u: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad u(x) = 1 + \sqrt{x}$$

und

$$v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad v(x) = \sin(x)$$

mit den Wertebereichen

$$u([0, \infty)) = [1, \infty), \quad v(\mathbb{R}) = [-1, 1].$$

Entscheiden Sie jeweils ob die Verkettungen $u \circ v$ und $v \circ u$ existieren und geben Sie diese gegebenenfalls an.

Lösung: $u \circ v$ existiert nicht. $v \circ u: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $(v \circ u)(x) = \sin(1 + \sqrt{x})$.

d) Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☒ Falsch Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow [1, \infty)$, $f(x) = x^2 + 1$ ist bijektiv.

☐ Wahr ☒ Falsch Eine Polynomfunktion vom Grad $m \geq 1$ hat genau m reelle Nullstellen.

4. (11 Punkte)

a) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{2^x}{x}.$$

Lösung: $f'(x) = \frac{\ln(2)2^x \cdot x - 2^x}{x^2}$

b) Geben Sie für

$$f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

möglichst große Teilintervalle von $[-1, 1]$ an, auf denen die Funktion streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist.

Lösung: f ist auf $[-1, 0]$ streng monoton wachsend und auf $[0, 1]$ streng monoton fallend.

c) Bestimmen Sie alle lokalen Extremalstellen von

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 e^{2x}$$

und entscheiden Sie jeweils ob eine lokale Maximal- oder eine lokale Minimalstelle vorliegt.

Lösung: $x = 0$ ist lokale Minimalstelle und $x = -1$ ist lokale Maximalstelle.

d) Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln(x)}{x^2 + 1}.$$

Lösung: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln(x)}{x^2 + 1} = 0$

e) Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☒ Wahr ☐ Falsch Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ hat in $x = 0$ eine Sattelstelle.

☐ Wahr ☒ Falsch Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ ist in $x = 0$ differenzierbar mit Tangente $T(x) = 0$.

5. (9 Punkte)

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^2 x e^x dx$$

mit partieller Integration.

Lösung: $\int_0^2 x e^x dx = e^2 + 1$

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int \frac{1}{\left(\frac{x}{2} - 1\right)^2} dx$$

mit der Substitution

$$x = h(t) = 2t + 2.$$

Lösung: $\int \frac{1}{\left(\frac{x}{2} - 1\right)^2} dx = -\frac{4}{x - 2} + c$

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr □ Falsch Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{1}{x^2(x^2 + 1)}$$

lautet

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}.$$

■ Wahr □ Falsch Mit dem unbestimmten Integral $\int f(x) dx$ wird die Menge aller Stammfunktionen von f bezeichnet.

6. (7 Punkte)

a) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom 2. Ordnung in $x_0 = 0$ der Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos(x)^2.$$

Lösung: $T_2(x; 0) = 1 - x^2.$

b) Berechnen Sie mit Hilfe der geometrischen Reihe die Taylor-Reihe der Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2 + 8x^2}$$

im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Lösung: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n}{2} x^{2n}, \quad |x| < \frac{1}{2}$

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☒ Falsch Es gilt

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

☐ Wahr ☒ Falsch Wenn $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine unendlich oft differenzierbare Funktion ist, so hat die Taylorreihe von f den Konvergenzradius $r = \infty$.