

Klausur zu Höhere Mathematik I BNUW SoSe 2023

Gesamtzahl der Aufgaben: 6, Gesamtpunktzahl: 70, Bearbeitungszeit: 120 Minuten

1. (12 Punkte)

a) Berechnen Sie die Summe

$$\sum_{k=10}^{100} \frac{1}{2^{3k-30}}$$

mit der geometrischen Summenformel.

Lösung: $\sum_{k=10}^{100} \frac{1}{2^{3k-30}} = \frac{8}{7} \left(1 - \left(\frac{1}{8} \right)^{91} \right)$

b) Gegeben ist die Ebene

$$E: \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

i) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Ebene E .

ii) Liegt der Punkt $(2, 2, 1)$ in der Ebene E ?

Lösung:

i) $E: \left\langle \mathbf{r}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \sqrt{3}$

ii) Ja, denn mit $\lambda = 0$ und $\mu = 1$ gilt $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr □ Falsch Es gilt $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 1\} = (-1, 1)$.

■ Wahr □ Falsch Es gilt $(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$.

□ Wahr ■ Falsch Es gilt $(2n)! = 2n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

2. (12.5 Punkte)

a) Berechnen Sie jeweils den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

i) $a_n = \frac{4n^2 + 5}{2n^2 - 1}$

ii) $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdot \sqrt[n]{7}$

Lösung:

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$

ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

b) Gegeben ist die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$b_n = \frac{2n!}{(n+1)!}.$$

i) Zeigen Sie rechnerisch, dass $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ streng monoton fallend ist.

Lösung: $b_{n+1} - b_n = -\frac{2}{(n+2)(n+1)} < 0$ oder $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n+1}{n+2} < 1$

ii) Entscheiden Sie jeweils, ob Infimum, Supremum, Minimum und Maximum der Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existieren, und geben Sie diese im Fall der Existenz an.

Lösung: $\max_{n \in \mathbb{N}} b_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} b_n = b_1 = 1$, $\inf_{n \in \mathbb{N}} b_n = 0$, $\min_{n \in \mathbb{N}} b_n$ existiert nicht

c) Berechnen Sie den Grenzwert der Reihe

$$\sum_{k=5}^{\infty} \left(\sqrt[k]{2} - \sqrt[k+1]{2} \right).$$

Lösung:

$$\sum_{k=5}^{\infty} \left(\sqrt[k]{2} - \sqrt[k+1]{2} \right) = \sqrt[5]{2} - 1.$$

d) Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☒ Wahr ☐ Falsch Eine konvergente Folge hat einen eindeutigen Grenzwert.

☐ Wahr ☒ Falsch Gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$, dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$.

☒ Wahr ☐ Falsch Ist die Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ keine Nullfolge, dann ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.

3. (14 Punkte)

a) Berechnen Sie alle reellen Nullstellen der Polynomfunktion

$$p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad p(x) = 2x^3 - 4x + 2.$$

Stellen Sie p in der Form $p(x) = (x - x_1) \dots (x - x_m)q(x)$ mit $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$ und $q(x) \neq 0$ dar.

Lösung: Nullstellen sind $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})$, $x_3 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{5})$.

$$p(x) = 2(x - 1)\left(x - \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})\right)\left(x - \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{5})\right)$$

b) Berechnen Sie die Umkehrfunktion f^{-1} der bijektiven Funktion

$$f: \left(-\frac{4}{3}, \infty\right) \rightarrow \left(\frac{1}{3}, \infty\right), \quad f(x) = \frac{x+2}{3x+4}.$$

Die Existenz der Umkehrfunktionen muss nicht begründet werden.

Lösung: $f^{-1}: \left(\frac{1}{3}, \infty\right) \rightarrow \left(-\frac{4}{3}, \infty\right), \quad f^{-1}(x) = \frac{2(1-2x)}{3x-1}$

c) Gegeben ist

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} \cos(x)e^{-3x}, & x \geq 0, \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), & x < 0. \end{cases}$$

i) Untersuchen Sie die Funktion auf Stetigkeit.

Lösung: Für $x \neq 0$ ist g stetig als Produkt bzw. Verkettung stetiger Funktionen. Wegen $\lim_{x \nearrow 0} g(x) = \lim_{x \searrow 0} g(x) = g(0) = 1$ ist g auch in $x = 0$ stetig.

ii) Berechnen Sie $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$.

Lösung: $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$

d) Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☒ Falsch Für zwei Funktionen $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt stets $f \circ g = g \circ f$.

☒ Wahr ☐ Falsch Für eine stetige Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt stets $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

4. (17 Punkte)

a) Berechnen Sie die Ableitung von

$$f(x) = \cos(\pi x)e^{-x}.$$

Lösung: $f'(x) = -\pi \sin(\pi x)e^{-x} - \cos(\pi x)e^{-x}$

b) Wir betrachten

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = xe^{-2x}.$$

i) Bestimmen Sie ein möglichst großes Intervall $I_1 \subset \mathbb{R}$ auf dem f streng konvex ist und ein möglichst großes Intervall $I_2 \subset \mathbb{R}$ auf dem f streng konkav ist.

Lösung: f ist auf $[1, \infty)$ streng konvex und auf $(-\infty, 1]$ streng konkav.

ii) Geben Sie die Wendestellen von f an.

Lösung: $x = 1$ ist Wendestelle.

c) Bestimmen Sie für

$$f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln(x^2 + 1)$$

alle globalen Extremalstellen sowie den Wertebereich $f([-1, 1])$.

Lösung: $x = 0$ ist globale Minimalstelle und $x = \pm 1$ sind globale Maximalstellen. Wertebereich ist $f([-1, 1]) = [0, \ln(2)]$.

d) Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi x)^2}{x^2}.$$

Lösung: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi x)^2}{x^2} = \pi^2$

e) Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☒ Wahr ☐ Falsch Jede differenzierbare Funktion ist auch stetig.

☐ Wahr ☒ Falsch Ist $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $f'(x_0) = 0$ für $x_0 \in \mathbb{R}$, dann ist x_0 eine Maximal- oder Minimalstelle.

5. (8.5 Punkte)

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 e^{2x+3} dx$$

mit der Substitution

$$x = h(t) = \frac{1}{2}(t - 3).$$

Lösung: $\int_0^1 e^{2x+3} dx = \frac{1}{2}(e^5 - e^3)$

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int \frac{x+1}{(x-1)^2} dx$$

mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung.

Lösung: $\int \frac{x+1}{(x-1)^2} dx = -\frac{2}{x-1} + \ln(|x-1|) + c$

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr □ Falsch Es gilt $\int \frac{2x}{1+x^2} dx = \ln(|1+x^2|) + c$

■ Wahr □ Falsch Die Stammfunktion $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ einer Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt.

6. (6 Punkte)

- a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius r und den Konvergenzbereich I der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^n} (x - 12)^n.$$

Lösung: Mit dem Wurzelkriterium kommt man auf $r = \infty$ und $I = \mathbb{R}$.

- b) Berechnen Sie mit Hilfe der geometrischen Reihe die Taylor-Reihe der Funktion

$$f: \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{9x + 3}$$

im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Lösung: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 3^{n-1} x^{n+1}, \quad |x| < \frac{1}{3}$

- c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☒ Falsch Wenn die Taylorreihe $T(x)$ einer unendlich oft differenzierbaren Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ den Konvergenzradius $r = \infty$ hat, dann gilt $T(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

☐ Wahr ☒ Falsch Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ gilt $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$.