

# Klausur zu Höhere Mathematik I Maschinenbau SoSe 2023

Gesamtzahl der Aufgaben: 6,      Gesamtpunktzahl: 70,      Bearbeitungszeit: 120 Minuten

1. (12 Punkte)

a) Berechnen Sie die Summe

$$\sum_{k=10}^{100} \frac{1}{2^{3k-30}}$$

mit der geometrischen Summenformel.

**Lösung:**  $\sum_{k=10}^{100} \frac{1}{2^{3k-30}} = \frac{8}{7} \left( 1 - \left( \frac{1}{8} \right)^{91} \right)$

b) Gegeben ist die Ebene

$$E: \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

i) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Ebene  $E$ .

ii) Liegt der Punkt  $(2, 2, 1)$  in der Ebene  $E$ ?

**Lösung:**

i)  $E: \left\langle \mathbf{r}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \sqrt{3}$

ii) Ja, denn mit  $\lambda = 0$  und  $\mu = 1$  gilt  $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr    □ Falsch    Es gilt  $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 1\} = (-1, 1)$ .

■ Wahr    □ Falsch    Es gilt  $(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$ .

□ Wahr    ■ Falsch    Es gilt  $(2n)! = 2n!$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

2. (12.5 Punkte)

a) Berechnen Sie jeweils den Grenzwert der Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

i)  $a_n = \frac{4n^2 + 5}{2n^2 - 1}$

ii)  $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdot \sqrt[n]{7}$

**Lösung:**

i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$

ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

b) Gegeben ist die Folge  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit

$$b_n = \frac{2n!}{(n+1)!}.$$

i) Zeigen Sie rechnerisch, dass  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  streng monoton fallend ist.

**Lösung:**  $b_{n+1} - b_n = -\frac{2}{(n+2)(n+1)} < 0$  oder  $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n+1}{n+2} < 1$

ii) Entscheiden Sie jeweils, ob Infimum, Supremum, Minimum und Maximum der Folge  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  existieren, und geben Sie diese im Fall der Existenz an.

**Lösung:**  $\max_{n \in \mathbb{N}} b_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} b_n = b_1 = 1$ ,  $\inf_{n \in \mathbb{N}} b_n = 0$ ,  $\min_{n \in \mathbb{N}} b_n$  existiert nicht

c) Berechnen Sie den Grenzwert der Reihe

$$\sum_{k=5}^{\infty} \left( \sqrt[k]{2} - \sqrt[k+1]{2} \right).$$

**Lösung:**

$$\sum_{k=5}^{\infty} \left( \sqrt[k]{2} - \sqrt[k+1]{2} \right) = \sqrt[5]{2} - 1.$$

d) Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☒ Wahr ☐ Falsch Eine konvergente Folge hat einen eindeutigen Grenzwert.

☐ Wahr ☒ Falsch Gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ , dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$ .

☒ Wahr ☐ Falsch Ist die Folge  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  keine Nullfolge, dann ist die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  divergent.

3. (14 Punkte)

a) Berechnen Sie alle reellen Nullstellen der Polynomfunktion

$$p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad p(x) = 2x^3 - 4x + 2.$$

Stellen Sie  $p$  in der Form  $p(x) = (x - x_1) \dots (x - x_m)q(x)$  mit  $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$  und  $q(x) \neq 0$  dar.

**Lösung:** Nullstellen sind  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})$ ,  $x_3 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{5})$ .

$$p(x) = 2(x - 1)\left(x - \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})\right)\left(x - \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{5})\right)$$

b) Berechnen Sie die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  der bijektiven Funktion

$$f: \left(-\frac{4}{3}, \infty\right) \rightarrow \left(\frac{1}{3}, \infty\right), \quad f(x) = \frac{x+2}{3x+4}.$$

Die Existenz der Umkehrfunktionen muss nicht begründet werden.

**Lösung:**  $f^{-1}: \left(\frac{1}{3}, \infty\right) \rightarrow \left(-\frac{4}{3}, \infty\right), \quad f^{-1}(x) = \frac{2(1-2x)}{3x-1}$

c) Gegeben ist

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} \cos(x)e^{-3x}, & x \geq 0, \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), & x < 0. \end{cases}$$

i) Untersuchen Sie die Funktion auf Stetigkeit.

**Lösung:** Für  $x \neq 0$  ist  $g$  stetig als Produkt bzw. Verkettung stetiger Funktionen. Wegen  $\lim_{x \nearrow 0} g(x) = \lim_{x \searrow 0} g(x) = g(0) = 1$  ist  $g$  auch in  $x = 0$  stetig.

ii) Berechnen Sie  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ .

**Lösung:**  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$

d) Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr   ☒ Falsch   Für zwei Funktionen  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gilt stets  $f \circ g = g \circ f$ .

☒ Wahr   ☐ Falsch   Für eine stetige Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gilt stets  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

4. (17 Punkte)

a) Berechnen Sie die Ableitung von

$$f(x) = \cos(\pi x)e^{-x}.$$

**Lösung:**  $f'(x) = -\pi \sin(\pi x)e^{-x} - \cos(\pi x)e^{-x}$

b) Wir betrachten

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = xe^{-2x}.$$

i) Bestimmen Sie ein möglichst großes Intervall  $I_1 \subset \mathbb{R}$  auf dem  $f$  streng konvex ist und ein möglichst großes Intervall  $I_2 \subset \mathbb{R}$  auf dem  $f$  streng konkav ist.

**Lösung:**  $f$  ist auf  $[1, \infty)$  streng konvex und auf  $(-\infty, 1]$  streng konkav.

ii) Geben Sie die Wendestellen von  $f$  an.

**Lösung:**  $x = 1$  ist Wendestelle.

c) Bestimmen Sie für

$$f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln(x^2 + 1)$$

alle globalen Extremalstellen sowie den Wertebereich  $f([-1, 1])$ .

**Lösung:**  $x = 0$  ist globale Minimalstelle und  $x = \pm 1$  sind globale Maximalstellen. Wertebereich ist  $f([-1, 1]) = [0, \ln(2)]$ .

d) Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi x)^2}{x^2}.$$

**Lösung:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi x)^2}{x^2} = \pi^2$

e) Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☒ Wahr ☐ Falsch Jede differenzierbare Funktion ist auch stetig.

☐ Wahr ☒ Falsch Ist  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und  $f'(x_0) = 0$  für  $x_0 \in \mathbb{R}$ , dann ist  $x_0$  eine Maximal- oder Minimalstelle.

5. (8.5 Punkte)

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 e^{2x+3} dx$$

mit der Substitution

$$x = h(t) = \frac{1}{2}(t - 3).$$

**Lösung:**  $\int_0^1 e^{2x+3} dx = \frac{1}{2}(e^5 - e^3)$

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int \frac{x+1}{(x-1)^2} dx$$

mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung.

**Lösung:**  $\int \frac{x+1}{(x-1)^2} dx = -\frac{2}{x-1} + \ln(|x-1|) + c$

c) Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr   □ Falsch   Es gilt  $\int \frac{2x}{1+x^2} dx = \ln(|1+x^2|) + c$

■ Wahr   □ Falsch   Die Stammfunktion  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  einer Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt.

6. (6 Punkte)

- a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius  $r$  und den Konvergenzbereich  $I$  der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^n} (x - 12)^n.$$

**Lösung:** Mit dem Wurzelkriterium kommt man auf  $r = \infty$  und  $I = \mathbb{R}$ .

- b) Berechnen Sie mit Hilfe der geometrischen Reihe die Taylor-Reihe der Funktion

$$f: \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{9x + 3}$$

im Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$ .

**Lösung:**  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 3^{n-1} x^{n+1}, \quad |x| < \frac{1}{3}$

- c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr    ☒ Falsch    Wenn die Taylorreihe  $T(x)$  einer unendlich oft differenzierbaren Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  den Konvergenzradius  $r = \infty$  hat, dann gilt  $T(x) = f(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

☐ Wahr    ☒ Falsch    Für alle  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  gilt  $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ .