Klausur zu Höhere Mathematik I BNUW WiSe 2023/24

Gesamtzahl der Aufgaben: 6, Gesamtpunktzahl: 60, Bearbeitungszeit: 120 Minuten

1. (10.5 Punkte)

a) Schreiben Sie die Mengen

$$M_1 = (1, 10) \setminus (2, 3]$$

und

$$M_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 \leq |x| < 5\}$$

jeweils als Vereinigung zweier Intervalle.

Lösung: $M_1 = (1, 2] \cup (3, 10)$, $M_2 = (-5, -4] \cup [4, 5)$

b) Gegeben sind $\boldsymbol{u} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie

i) $\|\boldsymbol{u}\|$

ii) $\boldsymbol{u} \times (-2\boldsymbol{v})$

iii) $\langle 3\boldsymbol{u}, -\frac{1}{3}\boldsymbol{v} \rangle$

Lösung: $\|\boldsymbol{u}\| = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\quad \boldsymbol{u} \times (-2\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\quad \langle 3\boldsymbol{u}, -\frac{1}{3}\boldsymbol{v} \rangle = -\frac{3}{2}$

c) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $P_1 = (1, 0, 1)$ zur Ebene

$$E\colon 2x - y - 2z + 1 = 0\,.$$

Lösung: $a = \frac{1}{3}$

d) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort −1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ■ Falsch Es gilt $\sqrt{|x|^2} = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

■ Wahr ☐ Falsch Es gilt $(x-1)^5 = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$.

☐ Wahr ■ Falsch Die folgenden Geraden g_1 und g_2 sind parallel:

$$g_1 : \ \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R},$$

$$g_2 : \ \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. (11.5 Punkte)

a) Berechnen Sie jeweils den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

i) $a_n = \dfrac{1+2n^2}{5-n^2}$ ii) $a_n = \left(1-\dfrac{3}{n}\right)^n$

Lösung:

i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -2$ ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e^{-3}$

b) Gegeben ist die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$b_n = n! - 10$$

i) Berechnen Sie die ersten 3 Folgenglieder b_1, b_2, b_3.

Lösung:

$$b_1 = -9, b_2 = -8, b_3 = -4$$

ii) Zeigen Sie, dass $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton wachsend ist.

Lösung:

$$b_{n+1} - b_n = (n+1)n! - n! = n \cdot n! > 0$$

iii) Entscheiden Sie, ob Infimum, Supremum, Minimum und Maximum der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existieren und geben Sie diese gegebenenfalls an.

Lösung:

$$\min_{n\in\mathbb{N}} b_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} b_n = b_1 = -9, \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} b_n = \infty, \quad \max_{n\in\mathbb{N}} b_n \text{ existiert nicht..}$$

c) Berechnen Sie den Grenzwert der Reihe

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{5^{k-1}}{3^{2k-6}}.$$

Lösung: $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{5^{k-1}}{3^{2k-6}} = \frac{5^2}{1-\frac{5}{9}}.$

d) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ■ Falsch Beschränkte Folgen sind stets konvergent.

■ Wahr ☐ Falsch Eine Reihe ist genau dann konvergent, wenn die Folge ihrer Partialsummen konvergiert.

3. (12 Punkte)

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich D der Funktion

$$f\colon D \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{2\ln\left(x\sqrt{x-1}\right)}{2-\cos(x)}.$$

Lösung: $D = (1, \infty)$

b) Berechnen Sie alle reellen Nullstellen der Polynomfunktion

$$p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad p(x) = 2x^3 - 2x^2 - x + 1.$$

Lösung: Die Nullstellen sind $x_1 = 1$ und $x_{2,3} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

c) Gegeben ist die Funktion

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 1, \\ \frac{1-x}{1+x}, & x > 1. \end{cases}$$

i) Entscheiden Sie, ob g in $x = 1$ stetig ist.

Lösung: $\lim_{x \nearrow 1} g(x) = \lim_{x \searrow 1} g(x) = g(1) = 0$. Damit ist g in $x = 1$ stetig

ii) Berechnen Sie $\lim_{x\to\infty} g(x)$ und $\lim_{x\to-\infty} g(x)$.

Lösung: $\lim_{x\to\infty} g(x) = -1, \quad \lim_{x\to-\infty} g(x) = \infty$

d) Berechnen Sie die Umkehrfunktion von

$$f\colon [0,\infty) \to [1,\infty), \quad f(x) = 1 + \sqrt{2x}.$$

Lösung: $f^{-1}\colon [1,\infty) \to [0,\infty), \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2$.

e) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort −1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr ☐ Falsch Es gilt $\tan(\arctan(x)) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

☐ Wahr ■ Falsch Die Funktion $f\colon \mathbb{R}\setminus\{-2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x+2)^{-3}$ ist unstetig an der Stelle $x = -2$.

■ Wahr ☐ Falsch Hat eine gebrochenrationale Funktion mit maximalem Definitionsbereich eine Definitionslücke, so ist diese entweder eine Polstelle oder eine hebbare Definitionslücke.

4. (11 Punkte)

a) Berechnen Sie die Ableitung von
$$f(x) = e^{x\cos(\pi x)}.$$

Lösung: $f'(x) = e^{x\cos(\pi x)}(\cos(\pi x) - \pi x \sin(\pi x)))$

b) Gegeben ist die Funktion $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$,
$$g(x) = \ln(x) - x\,.$$
Bestimmen Sie alle lokalen Extremalstellen der Funktion g und entscheiden Sie, ob es sich um lokale Minimal- oder Maximalstellen handelt. Berechnen Sie die entsprechenden lokalen Minima bzw. Maxima.

Lösung: $x = 1$ ist (echte) lokale Maximalstelle, lokales Maximum $g(1) = -1$

c) Untersuchen Sie die Funktion
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 - 3x^2$$
auf Monotonie. Geben Sie dabei möglichst große Teilintervalle von $\mathbb{R}$ an, auf denen die Funktion jeweils streng monoton wachsend beziehungsweise streng monoton fallend ist.

Lösung: Die Funktion f ist streng monoton wachsend auf $(-\infty, 0]$ und auf $[2, \infty)$, f ist streng monoton fallend auf $[0, 2]$.

d) Berechnen Sie den Grenzwert
$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x}$$

Lösung: $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$

e) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ■ Falsch Die Wurzelfunktion $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$ ist an der Stelle $x = 0$ differenzierbar.

☐ Wahr ■ Falsch Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar und $f''(x_0) = 0$ für $x_0 \in \mathbb{R}$, dann ist x_0 eine Wendestelle.

5. (8 Punkte)

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_1^2 (2x+1)\ln(x)\,dx$$

mit partieller Integration.

Lösung: $\int_1^2 (2x+1)\ln(x)\,dx = \left[\left(x^2+x\right)\ln(x)\right]_1^2 - \int_1^2 x+1\,dx = 6\ln(2) - \frac{5}{2}$

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int \frac{2x+1}{(x-1)(x+2)}\,dx$$

mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung.

Lösung: $\int \frac{2x+1}{(x-1)(x+2)}\,dx = \ln(|x-1|) + \ln(|x+2|) + c$

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr ☐ Falsch Ist $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ eine gerade und integrierbare Funktion, so gilt

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx = 2\int_0^1 f(x)\,dx\,.$$

☐ Wahr ■ Falsch Für jede Stammfunktion $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ einer integrierbaren Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ gilt

$$f'(x) = F(x) \quad \text{für alle } x \in [a,b]\,.$$

6. (7 Punkte)

a) Berechnen Sie das Taylor-Polynom 3. Grades der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{2x} - e^{-x}$$

zur Entwicklungsstelle $x_0 = 0$.

Lösung: $T_3(x;0) = 3x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x^3$

b) Berechnen Sie mit Hilfe der geometrischen Reihe die Taylor-Reihe der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x}{1+2x^2}$$

im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Lösung: Die Taylor-Reihe ist $\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^{2n+1}$.

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort −1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr ☐ Falsch Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine in einem Intervall $(x_0 - r, x_0 + r)$, $r > 0$, beliebig oft differenzierbare Funktion, so besitzt f eine eindeutige Taylor-Reihe um den Entwicklungspunkt x_0.

■ Wahr ☐ Falsch Für alle $x \in \mathbb{R}_0^+$ gilt

$$\cos(\sqrt{x}) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^k}{(2k)!} = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \cdots .$$