

Nachname:

Vorname:

Matrikelnummer:

**Klausur zu**  
**Höhere Mathematik I**  
**Maschinenbau**  
**WiSe 2023/24**

**Gesamtzahl der Aufgaben: 6,      Gesamtpunktzahl: 60,      Bearbeitungszeit: 120 Minuten**

1. (10.5 Punkte)

a) Schreiben Sie die Mengen

$$M_1 = (1, 10) \setminus (2, 3]$$

und

$$M_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 \leq |x| < 5\}$$

jeweils als Vereinigung zweier Intervalle.

b) Gegeben sind  $\mathbf{u} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ . Berechnen Sie

i)  $\|\mathbf{u}\|$

ii)  $\mathbf{u} \times (-2\mathbf{v})$

iii)  $\langle 3\mathbf{u}, -\frac{1}{3}\mathbf{v} \rangle$

c) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes  $P_1 = (1, 0, 1)$  zur Ebene

$$E: 2x - y - 2z + 1 = 0.$$

d) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Wahr    Falsch   Es gilt  $\sqrt{|x|^2} = x$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

Wahr    Falsch   Es gilt  $(x - 1)^5 = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$ .

Wahr    Falsch   Die folgenden Geraden  $g_1$  und  $g_2$  sind parallel:

$$g_1: \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R},$$

$$g_2: \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. (11.5 Punkte)

a) Berechnen Sie jeweils den Grenzwert der Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

$$\text{i) } a_n = \frac{1 + 2n^2}{5 - n^2} \qquad \text{ii) } a_n = \left(1 - \frac{3}{n}\right)^n$$

b) Gegeben ist die Folge  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit

$$b_n = n! - 10$$

i) Berechnen Sie die ersten 3 Folgenglieder  $b_1, b_2, b_3$ .

ii) Zeigen Sie, dass  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  streng monoton wachsend ist.

iii) Entscheiden Sie, ob Infimum, Supremum, Minimum und Maximum der Folge  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  existieren und geben Sie diese gegebenenfalls an.

c) Berechnen Sie den Grenzwert der Reihe

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{5^{k-1}}{3^{2k-6}}$$

d) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Wahr  Falsch Beschränkte Folgen sind stets konvergent.

Wahr  Falsch Eine Reihe ist genau dann konvergent, wenn die Folge ihrer Partialsummen konvergiert.

3. (12 Punkte)

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich  $D$  der Funktion

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{2 \ln(x\sqrt{x-1})}{2 - \cos(x)}$$

b) Berechnen Sie alle reellen Nullstellen der Polynomfunktion

$$p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad p(x) = 2x^3 - 2x^2 - x + 1.$$

c) Gegeben ist die Funktion

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 1, \\ \frac{1-x}{1+x}, & x > 1. \end{cases}$$

i) Entscheiden Sie, ob  $g$  in  $x = 1$  stetig ist.

ii) Berechnen Sie  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$  und  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ .

d) Berechnen Sie die Umkehrfunktion von

$$f: [0, \infty) \rightarrow [1, \infty), \quad f(x) = 1 + \sqrt{2x}.$$

- e) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Wahr  Falsch Es gilt  $\tan(\arctan(x)) = x$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

Wahr  Falsch Die Funktion  $f: \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x+2)^{-3}$  ist unstetig an der Stelle  $x = -2$ .

Wahr  Falsch Hat eine gebrochenrationale Funktion mit maximalem Definitionsbereich eine Definitionslücke, so ist diese entweder eine Polstelle oder eine hebbare Definitionslücke.

4. (11 Punkte)

- a) Berechnen Sie die Ableitung von

$$f(x) = e^{x \cos(\pi x)}.$$

- b) Gegeben ist die Funktion  $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$g(x) = \ln(x) - x.$$

Bestimmen Sie alle lokalen Extremalstellen der Funktion  $g$  und entscheiden Sie, ob es sich um lokale Minimal- oder Maximalstellen handelt. Berechnen Sie die entsprechenden lokalen Minima bzw. Maxima.

- c) Untersuchen Sie die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 - 3x^2$$

auf Monotonie. Geben Sie dabei möglichst große Teilintervalle von  $\mathbb{R}$  an, auf denen die Funktion jeweils streng monoton wachsend beziehungsweise streng monoton fallend ist.

- d) Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x}$$

- e) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Wahr  Falsch Die Wurzelfunktion  $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x}$  ist an der Stelle  $x = 0$  differenzierbar.

Wahr  Falsch Ist  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal differenzierbar und  $f''(x_0) = 0$  für  $x_0 \in \mathbb{R}$ , dann ist  $x_0$  eine Wendestelle.

5. (8 Punkte)

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_1^2 (2x + 1) \ln(x) dx$$

mit partieller Integration.

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int \frac{2x + 1}{(x - 1)(x + 2)} dx$$

mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung.

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Wahr  Falsch Ist  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  eine gerade und integrierbare Funktion, so gilt

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 f(x) dx.$$

Wahr  Falsch Für jede Stammfunktion  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  einer integrierbaren Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  gilt

$$f'(x) = F(x) \quad \text{für alle } x \in [a, b].$$

6. (7 Punkte)

a) Berechnen Sie das Taylor-Polynom 3. Grades der Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{2x} - e^{-x}$$

zur Entwicklungsstelle  $x_0 = 0$ .

b) Berechnen Sie mit Hilfe der geometrischen Reihe die Taylor-Reihe der Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{1 + 2x^2}$$

im Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$ .

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Wahr  Falsch Ist  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine in einem Intervall  $(x_0 - r, x_0 + r)$ ,  $r > 0$ , beliebig oft differenzierbare Funktion, so besitzt  $f$  eine eindeutige Taylor-Reihe um den Entwicklungspunkt  $x_0$ .

Wahr  Falsch Für alle  $x \in \mathbb{R}_0^+$  gilt

$$\cos(\sqrt{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{(2k)!} = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \dots$$