Klausur zu Höhere Mathematik I BNUW SoSe 2024

Gesamtzahl der Aufgaben: 6, Gesamtpunktzahl: 60, Bearbeitungszeit: 120 Minuten

1. (10 Punkte)

a) Schreiben Sie die Mengen

$$M_1 = [-20, 1] \setminus \{0\}$$

und

$$M_2 = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; 4 \leq x^2 < 9 \right\}$$

jeweils als Vereinigung zweier Intervalle.

Lösung: $M_1 = [-20, 0) \cup (0, 1]$, $M_2 = (-3, -2] \cup [2, 3)$

b) Bestimmen Sie eine Parameterform der Geraden durch die Punkte $A = (1, -3, 5)$ und $B = (2, 0, 2)$.

Lösung:

$$g\colon \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

c) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Ebene

$$E\colon \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung: $E\colon \left\langle \boldsymbol{r}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{4}{3}$

d) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr ☐ Falsch Es gilt $|x|^2 = x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

☐ Wahr ■ Falsch Es gilt $(n-1)! = (n-1)n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

☐ Wahr ■ Falsch Es gilt $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}$ für alle $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$.

2. (12 Punkte)

a) Berechnen Sie jeweils den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

i) $a_n = \dfrac{1+n^3}{5n^4 - n^2}$ ii) $a_n = \dfrac{5^n}{3^{2n+1}}$

Lösung:

i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

b) Gegeben ist die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$b_n = \frac{(-1)^n n}{n+1}$$

i) Berechnen Sie die ersten 5 Folgenglieder b_1, b_2, b_3, b_4, b_5.

Lösung:

$$b_1 = -\frac{1}{2}, b_2 = \frac{2}{3}, b_3 = -\frac{3}{4}, b_4 = \frac{4}{5}, b_5 = -\frac{5}{6}$$

ii) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Lösung: Die Folge ist weder monoton fallend noch monoton wachsend.

iii) Entscheiden Sie, ob die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist und geben Sie gegebenenfalls Infimum und Supremum der Folge an, falls diese existieren.

Lösung: Die Folge ist beschränkt, es gilt

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} b_n = -1, \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} b_n = 1.$$

c) Untersuchen Sie, ob die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k+1}{k^2+1}$$

konvergiert.

Lösung: Die Reihe konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium.

d) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort −1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr ☐ Falsch Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \sin(n)$ ist beschränkt.

■ Wahr ☐ Falsch Bei einer konvergenten Reihe ist die Folge der Partialsummen beschränkt.

3. (12 Punkte)

a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich D und den zugehörigen Wertebereich $f(D)$ der folgenden Funktion an.

$$f\colon D \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 10^{\ln(|x|)}$$

Lösung: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(D) = (0, \infty)$

b) Berechnen Sie die Asymptote der gebrochenrationalen Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{2x^3 - 2x^2 - x + 1}{x + 1}.$$

Lösung: Die Asymptote hat die Funktionsvorschrift $h(x) = 2x^2 - 4x + 3$.

c) Gegeben ist die Funktion

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|}, & x \leq 0, \\ \dfrac{1 - x^3}{x^5 + 2}, & x > 0. \end{cases}$$

i) Untersuchen Sie, ob g in $x = 0$ stetig ist.

Lösung: $\lim_{x \nearrow 0} g(x) = 0 \neq \frac{1}{2} = \lim_{x \searrow 0} g(x)$. Damit ist g in $x = 0$ unstetig

ii) Berechnen Sie $\lim_{x \to \infty} g(x)$ und $\lim_{x \to -\infty} g(x)$.

Lösung: $\lim_{x \to \infty} g(x) = 0, \quad \lim_{x \to -\infty} g(x) = \infty$

d) Berechnen Sie die Umkehrfunktion der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to (1, \infty), \quad f(x) = 1 + e^{4x}\,.$$

Sie müssen hierbei NICHT zeigen, dass f bijektiv ist.

Lösung: $f^{-1}\colon (1, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{4} \ln(x - 1)$.

e) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort $+1$ Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr ☐ Falsch Es gilt $\lim_{x \searrow \frac{\pi}{2}} \tan(x) = -\infty$.

■ Wahr ☐ Falsch Die Arkustangensfunktion ist stetig auf ihrem gesamten Definitionsbereich.

☐ Wahr ■ Falsch Jede Polynomfunktion dritten Grades hat genau drei reelle Nullstellen.

4. (11 Punkte)

a) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \sin(\pi x)\sqrt{x^2+1}.$$

Lösung: $f'(x) = \pi\cos(\pi x)\sqrt{x^2+1} + \frac{x\sin(\pi x)}{\sqrt{x^2+1}}$

b) Gegeben ist die Funktion $g\colon [-2,0] \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = e^{x^3-3x}\,.$$

Bestimmen Sie alle globalen Extremalstellen sowie den Wertebereich $g([-2,0])$.

Lösung: Die globale Minimalstelle ist $x=-2$ mit $g(-2)=e^{-2}$. Die globale Maximalstelle ist $x=-1$ mit $g(-1)=e^2$. Der Wertebereich ist $g([-2,0]) = [e^{-2}, e^2]$,

c) Bestimmen Sie alle Wendestellen der Funktion

$$p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\; p(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2\,.$$

Lösung: Die Wendestellen sind $x=-1$ und $x=1$.

d) Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{xe^x}\,.$$

Lösung: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{xe^x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^2)2x}{(x+1)e^x} = 0$

e) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ■ Falsch Ist eine differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend, so gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

■ Wahr ☐ Falsch Eine zweimal differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f''(x) \le 0$ für alle $x \in (a,b)$ ist konkav auf $[a,b]$.

5. (8 Punkte)

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_1^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}\,dx$$

mit der Substitution $x = h(t) = t^2$.

Lösung: $\int_1^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}\,dx = \int_1^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,dt = 1 - \sin(1)$

b) Berechnen Sie die Fläche, die vom Graphen der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ f(x) = 4 - 2x,$$

und der x-Achse im Bereich $x \in [0, 5]$ eingeschlossen wird.

Lösung: $A = \int_0^5 |4 - 2x|\,dx = 13$

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr ☐ Falsch Das Integral $\int (3x^2 + x + 1)e^x\,dx$ lässt sich mittels zweimaliger Anwendung der partiellen Integration berechnen.

☐ Wahr ■ Falsch Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung von $\frac{1}{x(x^2-1)}$ lautet $\frac{A}{x} + \frac{Cx + D}{x^2 - 1}$.

6. (7 Punkte)

a) Berechnen Sie das Taylor-Polynom 2. Grades der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{1-x^2}$$

zur Entwicklungsstelle $x_0 = 1$.

Lösung: $T_2(x;1) = 1 - 2(x-1) + (x-1)^2$

b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius r und den Konvergenzbereich I der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{4^n}(x+2)^n.$$

Lösung: Das Quotientenkriterium liefert $r = 4$ und $I = (-6, 2)$.

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort −1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ■ Falsch Am Rand ihres Konvergenzbereichs ist eine Potenzreihe immer divergent.

■ Wahr ☐ Falsch Die Taylor-Reihe von $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin(x^2)$ im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{4k+2}}{(2k+1)!} = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \cdots .$$