Nachname:

Vorname:

Matrikelnummer:

Klausur zu Höhere Mathematik I BNUW SoSe 2024

Gesamtzahl der Aufgaben: 6, Gesamtpunktzahl: 60, Bearbeitungszeit: 120 Minuten

1. (10 Punkte)

   a) Schreiben Sie die Mengen
   $$M_1 = [-20, 1] \setminus \{0\}$$
   und
   $$M_2 = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; 4 \leq x^2 < 9 \right\}$$
   jeweils als Vereinigung zweier Intervalle.

   b) Bestimmen Sie eine Parameterform der Geraden durch die Punkte $A = (1, -3, 5)$ und $B = (2, 0, 2)$.

   c) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Ebene
   $$E\colon \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

   d) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

   Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

   ☐ Wahr ☐ Falsch Es gilt $|x|^2 = x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

   ☐ Wahr ☐ Falsch Es gilt $(n-1)! = (n-1)n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

   ☐ Wahr ☐ Falsch Es gilt $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}$ für alle $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$.

2. (12 Punkte)

   a) Berechnen Sie jeweils den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

   i) $a_n = \dfrac{1 + n^3}{5n^4 - n^2}$ ii) $a_n = \dfrac{5^n}{3^{2n+1}}$

   b) Gegeben ist die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit
   $$b_n = \frac{(-1)^n n}{n+1}$$

   i) Berechnen Sie die ersten 5 Folgenglieder b_1, b_2, b_3, b_4, b_5.

ii) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

iii) Entscheiden Sie, ob die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist und geben Sie gegebenenfalls Infimum und Supremum der Folge an, falls diese existieren.

c) Untersuchen Sie, ob die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{k+1}{k^2+1}$$

konvergiert.

d) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort −1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☐ Falsch Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \sin(n)$ ist beschränkt.

☐ Wahr ☐ Falsch Bei einer konvergenten Reihe ist die Folge der Partialsummen beschränkt.

3. (12 Punkte)

a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich D und den zugehörigen Wertebereich $f(D)$ der folgenden Funktion an.

$$f\colon D \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 10^{\ln(|x|)}$$

b) Berechnen Sie die Asymptote der gebrochenrationalen Funktion

$$f\colon \mathbb{R}\setminus\{-1\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{2x^3-2x^2-x+1}{x+1}.$$

c) Gegeben ist die Funktion

$$g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|}, & x \le 0, \\ \dfrac{1-x^3}{x^5+2}, & x > 0. \end{cases}$$

i) Untersuchen Sie, ob g in $x = 0$ stetig ist.

ii) Berechnen Sie $\lim_{x\to\infty} g(x)$ und $\lim_{x\to-\infty} g(x)$.

d) Berechnen Sie die Umkehrfunktion der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to (1,\infty), \quad f(x) = 1 + e^{4x}\,.$$

Sie müssen hierbei NICHT zeigen, dass f bijektiv ist.

e) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort −1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☐ Falsch Es gilt $\lim_{x\searrow\frac{\pi}{2}} \tan(x) = -\infty$.

☐ Wahr ☐ Falsch Die Arkustangensfunktion ist stetig auf ihrem gesamten Definitionsbereich.

☐ Wahr ☐ Falsch Jede Polynomfunktion dritten Grades hat genau drei reelle Nullstellen.

4. (11 Punkte)

   a) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
   $$f(x) = \sin(\pi x)\sqrt{x^2+1}.$$

   b) Gegeben ist die Funktion $g\colon [-2,0] \to \mathbb{R}$,
   $$g(x) = e^{x^3-3x}\,.$$
   Bestimmen Sie alle globalen Extremalstellen sowie den Wertebereich $g([-2,0])$.

   c) Bestimmen Sie alle Wendestellen der Funktion
   $$p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ p(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2\,.$$

   d) Berechnen Sie den Grenzwert
   $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{xe^x}\,.$$

   e) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort −1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

   Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

   ☐ Wahr ☐ Falsch Ist eine differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend, so gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

   ☐ Wahr ☐ Falsch Eine zweimal differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f''(x) \leq 0$ für alle $x \in (a,b)$ ist konkav auf $[a,b]$.

5. (8 Punkte)

   a) Berechnen Sie das Integral
   $$\int_1^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}\,dx$$
   mit der Substitution $x = h(t) = t^2$.

   b) Berechnen Sie die Fläche, die vom Graphen der Funktion
   $$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 4 - 2x,$$
   und der x-Achse im Bereich $x \in [0,5]$ eingeschlossen wird.

   c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort −1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

   Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

   ☐ Wahr ☐ Falsch Das Integral $\int (3x^2+x+1)e^x\,dx$ lässt sich mittels zweimaliger Anwendung der partiellen Integration berechnen.

   ☐ Wahr ☐ Falsch Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung von $\dfrac{1}{x(x^2-1)}$ lautet
   $$\frac{A}{x} + \frac{Cx+D}{x^2-1}.$$

6. (7 Punkte)

a) Berechnen Sie das Taylor-Polynom 2. Grades der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{1-x^2}$$

zur Entwicklungsstelle $x_0 = 1$.

b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius r und den Konvergenzbereich I der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{4^n}(x+2)^n.$$

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☐ Falsch Am Rand ihres Konvergenzbereichs ist eine Potenzreihe immer divergent.

☐ Wahr ☐ Falsch Die Taylor-Reihe von $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x^2)$ im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{4k+2}}{(2k+1)!} = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \cdots .$$