Nachname:	
Vorname:	
Matrikelnummer:	

Klausur zu Höhere Mathematik I BNUW WiSe 2024/2025

Gesamtzahl der Aufgaben: 6, Gesamtpunktzahl: 70, Bearbeitungszeit: 120 Minuten

1. (9.5 Punkte)

   a) Geben Sie die Mengen I_1 und I_2 als Intervall bzw. als Vereinigung von Intervallen an.

   $$I_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid |x+3| < 4\}, \quad I_2 = \big((-\infty, 5) \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}\big) \setminus (0, 1]$$

   b) Berechen Sie den Winkel φ zwischen den Vektoren

   $$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix}.$$

   Dazu können Sie die nachfolgende Tabelle nutzen.

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos(\varphi)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

   c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

   Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

   ☐ Wahr ☐ Falsch Für $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ gilt $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} \rangle = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \times \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c} \rangle$.

   ☐ Wahr ☐ Falsch Durch $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 16$ wird ein Kreis mit Radius $r = 4$ und Mittelpunkt $(x_0, y_0) = (-3, 2)$ in der (x, y)-Ebene beschrieben.

2. (14 Punkte)

   a) Berechnen Sie, falls möglich, den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

   $$a_n = \frac{n^3+1}{n^2+1} - \frac{n^2-1}{n-1}.$$

   Falls der Grenzwert nicht existiert, geben Sie an, ob die Folge bestimmt divergent gegen $-\infty$ oder ∞ ist oder ob sie unbestimmt divergent ist.

   b) Gegeben ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

   $$a_n = \frac{3n+2}{2n}.$$

   Entscheiden Sie jeweils, ob das Infimum, Supremum, Minimum oder Maximum der Folge existiert und geben Sie dies gegebenenfalls an. *Hinweis: Die Angabe von Rechnenwegen ist hier nicht erforderlich.*

   c) Berechnen Sie den Grenzwert der Reihe

   $$\sum_{k=5}^{\infty}\left(\frac{k+1}{k} - \frac{k}{k-1}\right).$$

   d) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort $+1$ Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

   Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

   ☐ Wahr ☐ Falsch Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^n$ hat die beiden Grenzwerte -1 und $+1$.

   ☐ Wahr ☐ Falsch Ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

3. (15 Punkte)

   a) Geben Sie für die Funktion

   $$f\colon D \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{-\sqrt{x+1}}$$

   den maximalen Definitionsbereich D und den zugehörigen Wertebereich $f(D)$ jeweils als Intervalle an. *Hinweis: Die Angabe von Rechnenwegen ist hier nicht erforderlich.*

   b) Berechnen Sie die Umkehrfunktion f^{-1} der bijektiven Funktion

   $$f\colon (-2,\infty) \to (-\infty, \tfrac{1}{2}), \quad f(x) = \frac{x-3}{2x+4}.$$

   Geben Sie dabei f^{-1} mit Definitions- und Wertebereich an.

   c) Gegeben ist die Funktion

   $$f\colon \mathbb{R}\setminus\{0,1\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^2-3x-2}{x^2-x}.$$

   Rechnen Sie nach, ob die Funktion an der Definitionslücke $x=0$ stetig fortsetzbar ist oder eine Polstelle hat. Geben Sie bei einer Polstelle an, ob ein Pol mit oder ohne Vorzeichenwechsel vorliegt.

d) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \sin\left(\sqrt{\frac{1}{8}\pi^2\,|x-1|}\right), & x < -1, \\ \ln\big((x+2)e\big), & -1 \le x. \end{cases}$$

Rechnen Sie nach, ob f in $x = -1$ stetig ist.

e) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☐ Falsch Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to [-1,1]$, $f(x) = \sin(x)$ ist bijektiv.

☐ Wahr ☐ Falsch Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ ist in $x = 0$ unstetig.

4. (14 Punkte)

a) Berechnen Sie alle lokalen Extremalstellen der Funktion

$$f\colon [-1,4] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 e^{-x}.$$

Geben Sie jeweils an, ob es sich um eine Minimal- oder Maximalstelle handelt.

b) Berechnen Sie für die Funktion

$$f\colon (1,4] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \big(\ln(x-1)\big)^2$$

möglichst große Teilintervalle des Definitionsbereichs, auf denen die Funktion streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist.

c) Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x) - \sin(5x)}{3\sin(x)}.$$

d) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☐ Falsch Ist eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar, dann ist die Funktion in x_0 auch stetig.

☐ Wahr ☐ Falsch Die Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar und $f'(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in (a,b)$, dann muss x_0 eine Minimalstelle oder eine Maximalstelle von f sein.

5. (10.5 Punkte)

   a) Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x\cos(\pi x)\,dx$$

   mit partieller Integration.

   b) Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \frac{x^2-6x+4}{x(x-2)^2}\,dx.$$

   c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

   Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

   ☐ Wahr ☐ Falsch Für jede stetige Funktion $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ entspricht $\int_a^b f(x)\,dx$ dem Flächeninhalt der vom Funktionsgraphen und der x-Achse über $[a,b]$ eingeschlossenen Fläche.

   ☐ Wahr ☐ Falsch Sind $F_1\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ und $F_2\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ zwei Stammfunktionen einer Funktion $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$, dann gilt $F_1(x)-F_2(x)=c$ für alle $x\in[a,b]$ mit einer Konstanten $c\in\mathbb{R}$.

6. (7 Punkte)

   a) Berechnen Sie den Konvergenzradius r der Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 3^k}{k!}x^k.$$

   b) Berechnen Sie die Taylor-Reihe der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\frac{2}{3x^2+4}$$

   um $x_0=0$, indem Sie die Taylor-Reihe aus einer bekannten Reihendarstellung herleiten. Geben Sie dabei den Konvergenzbereich der Reihe als Intervall an.

   c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

   Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

   ☐ Wahr ☐ Falsch Ist $T_n(x;x_0)$ das n-te Taylor-Polynom einer Funktion f, dann gilt $f(x_0)=T_n(x_0;x_0)$ und $f^{(k)}(x_0)=T_n^{(k)}(x_0;x_0)$ für $k=1,\ldots,n$.

   ☐ Wahr ☐ Falsch Für alle $x\in\mathbb{R}$ gilt

$$xe^{-x^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}x^{2k+1}.$$