Klausur zu
Höhere Mathematik I
Maschinenbau
WiSe 2024/2025

Gesamtzahl der Aufgaben: 6, Gesamtpunktzahl: 70, Bearbeitungszeit: 120 Minuten

1. (9.5 Punkte)

a) Geben Sie die Mengen I_1 und I_2 als Intervall bzw. als Vereinigung von Intervallen an.

$$I_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid |x + 3| < 4\}, \quad I_2 = ((-\infty, 5) \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}) \setminus (0, 1]$$

Lösung: $I_1 = (-7, 1), \quad I_2 = (-\infty, 0] \cup (1, \infty)$

b) Berechnen Sie den Winkel φ zwischen den Vektoren

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Dazu können Sie die nachfolgende Tabelle nutzen.

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos(\varphi)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

Lösung: $\cos(\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff \varphi = \frac{\pi}{6}$

c) Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Wahr Falsch Für $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ gilt $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \times \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle$.

Wahr Falsch Durch $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$ wird ein Kreis mit Radius $r = 4$ und Mittelpunkt $(x_0, y_0) = (-3, 2)$ in der (x, y) -Ebene beschrieben.

2. (14 Punkte)

a) Berechnen Sie, falls möglich, den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{n^3 + 1}{n^2 + 1} - \frac{n^2 - 1}{n - 1}.$$

Falls der Grenzwert nicht existiert, geben Sie an, ob die Folge bestimmt divergent gegen $-\infty$ oder ∞ ist oder ob sie unbestimmt divergent ist.

Lösung: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$

b) Gegeben ist die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{3n + 2}{2n}.$$

Entscheiden Sie jeweils, ob das Infimum, Supremum, Minimum oder Maximum der Folge existiert und geben Sie dies gegebenenfalls an. *Hinweis: Die Angabe von Rechenwegen ist hier nicht erforderlich.*

Lösung: $\max_{n \in \mathbb{N}} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n = a_1 = \frac{5}{2}$, $\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n = \frac{3}{2}$, $\min_{n \in \mathbb{N}} a_n$ existiert nicht

c) Berechnen Sie den Grenzwert der Reihe

$$\sum_{k=5}^{\infty} \left(\frac{k+1}{k} - \frac{k}{k-1} \right).$$

Lösung: $\sum_{k=5}^{\infty} \left(\frac{k+1}{k} - \frac{k}{k-1} \right) = -\frac{1}{4}$

d) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Wahr Falsch Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^n$ hat die beiden Grenzwerte -1 und $+1$.

Wahr Falsch Ist $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge, dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

3. (15 Punkte)

a) Geben Sie für die Funktion

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{-\sqrt{x+1}}$$

den maximalen Definitionsbereich D und den zugehörigen Wertebereich $f(D)$ jeweils als Intervalle an. *Hinweis: Die Angabe von Rechenwegen ist hier nicht erforderlich.*

Lösung: $D = [-1, \infty), \quad f(D) = (0, 1]$

b) Berechnen Sie die Umkehrfunktion f^{-1} der bijektiven Funktion

$$f: (-2, \infty) \rightarrow (-\infty, \frac{1}{2}), \quad f(x) = \frac{x-3}{2x+4}.$$

Geben Sie dabei f^{-1} mit Definitions- und Wertebereich an.

Lösung: $f^{-1}: (-\infty, \frac{1}{2}) \rightarrow (-2, \infty), \quad f^{-1}(x) = \frac{3+4x}{1-2x}$

c) Gegeben ist die Funktion

$$f: \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^2 - 3x - 2}{x^2 - x}.$$

Rechnen Sie nach, ob die Funktion an der Definitionslücke $x = 0$ stetig fortsetzbar ist oder eine Polstelle hat. Geben Sie bei einer Polstelle an, ob ein Pol mit oder ohne Vorzeichenwechsel vorliegt.

Lösung: $\lim_{x \searrow 0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \nearrow 0} f(x) = -\infty.$ Also Pol mit Vorzeichenwechsel

d) Gegeben ist die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \sin\left(\sqrt{\frac{1}{8}\pi^2 |x-1|}\right), & x < -1, \\ \ln((x+2)e), & -1 \leq x. \end{cases}$$

Rechnen Sie nach, ob f in $x = -1$ stetig ist.

Lösung: f ist stetig, denn $\lim_{x \nearrow -1} f(x) = f(-1) = \lim_{x \searrow -1} f(x) = 1.$

e) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Wahr Falsch Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], f(x) = \sin(x)$ ist bijektiv.

Wahr Falsch Die Funktion $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$ ist in $x = 0$ unstetig.

4. (14 Punkte)

a) Berechnen Sie alle lokalen Extremalstellen der Funktion

$$f: [-1, 4] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 e^{-x}.$$

Geben Sie jeweils an, ob es sich um eine Minimal- oder Maximalstelle handelt.

Lösung: $x = -1$ ist lokale Minimalstelle, $x = 3$ ist lokale Maximalstelle, $x = 4$ ist lokale Minimalstelle

b) Berechnen Sie für die Funktion

$$f: (1, 4] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = (\ln(x - 1))^2$$

möglichst große Teilintervalle des Definitionsbereichs, auf denen die Funktion streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist.

Lösung: f ist auf $(1, 2]$ streng monoton fallend und auf $[2, 4]$ streng monoton wachsend.

c) Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) - \sin(5x)}{3 \sin(x)}.$$

Lösung: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) - \sin(5x)}{3 \sin(x)} = -1$

d) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Wahr Falsch Ist eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar, dann ist die Funktion in x_0 auch stetig.

Wahr Falsch Die Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei differenzierbar und $f'(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in (a, b)$, dann muss x_0 eine Minimalstelle oder eine Maximalstelle von f sein.

5. (10.5 Punkte)

a) Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x \cos(\pi x) dx$$

mit partieller Integration.

Lösung: $\int_0^{\frac{1}{2}} x \cos(\pi x) dx = \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{\pi^2}$

b) Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \frac{x^2 - 6x + 4}{x(x-2)^2} dx.$$

Lösung: $\int \frac{x^2 - 6x + 4}{x(x-2)^2} dx = \ln(|x|) + \frac{2}{x-2} + c$

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Wahr Falsch Für jede stetige Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ entspricht $\int_a^b f(x) dx$ dem Flächeninhalt der vom Funktionsgraphen und der x -Achse über $[a, b]$ eingeschlossenen Fläche.

Wahr Falsch Sind $F_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $F_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Stammfunktionen einer Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dann gilt $F_1(x) - F_2(x) = c$ für alle $x \in [a, b]$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$.

6. (7 Punkte)

a) Berechnen Sie den Konvergenzradius r der Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 3^k}{k!} x^k.$$

Lösung: $r = \infty$.

b) Berechnen Sie die Taylor-Reihe der Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{2}{3x^2 + 4}$$

um $x_0 = 0$, indem Sie die Taylor-Reihe aus einer bekannten Reihendarstellung herleiten. Geben Sie dabei den Konvergenzbereich der Reihe als Intervall an.

Lösung: $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^k}{2 \cdot 4^k} x^{2k}$ für $x \in \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

c) Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr □ Falsch Ist $T_n(x; x_0)$ das n -te Taylor-Polynom einer Funktion f , dann gilt $f(x_0) = T_n(x_0; x_0)$ und $f^{(k)}(x_0) = T_n^{(k)}(x_0; x_0)$ für $k = 1, \dots, n$.

■ Wahr □ Falsch Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$xe^{-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k+1}.$$