Klausur zu Höhere Mathematik I BNUW SoSe 2025

Gesamtzahl der Aufgaben: 6, Gesamtpunktzahl: 60, Bearbeitungszeit: 120 Minuten

1. (8 Punkte)

a) Schreiben Sie die Menge

$$I = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 10\} \setminus \{1, 2\}$$

als Vereinigung von Intervallen.

Lösung: $I = [0,1) \cup (1,2) \cup (2,10]$

b) Die beiden Geraden

$$g_1 : \boldsymbol{r} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R}, \qquad g_2 : \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mu \in \mathbb{R}$$

sind parallel. Bestimmen Sie den Abstand d von g_1 und g_2.

Lösung: $d = 10$

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ■ Falsch Es gilt $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ für alle $a, b \in [0, \infty)$.

■ Wahr ☐ Falsch Es gilt $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

2. (12 Punkte)

a) Berechnen Sie für die zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils den Grenzwert.

i) $a_n = \dfrac{(2n+1)^2}{(3n+2)^2}$ ii) $b_n = \dfrac{4^n}{5^n} + \sqrt[n]{7}$

Lösung:

i) $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{4}{9}$ ii) $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$

b) Gegeben ist die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$c_n = \frac{1}{n^2+2n}.$$

i) Zeigen Sie rechnerisch, dass die Folge streng monoton fallend ist.

Lösung: $\dfrac{c_n}{c_{n+1}} = \dfrac{(n+1)^2+2(n+1)}{n^2+2n} > 1$ oder $c_{n+1} - c_n = -\frac{2n+3}{(n^2+4n+3)(n^2+2n)} < 0$

ii) Entscheiden Sie jeweils, ob das Infimum, Supremum, Minimum oder Maximum der Folge existieren und geben Sie diese gegebenenfalls an.

Lösung: $\sup_{n\in\mathbb{N}} c_n = \max_{n\in\mathbb{N}} c_n = c_1 = \frac{1}{3}$, $\inf_{n\in\mathbb{N}} c_n = 0$, $\min_{n\in\mathbb{N}} c_n$ existiert nicht

iii) Entscheiden Sie, ob die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n c_n$ nach dem Leibniz-Kriterium konvergent ist. Geben Sie eine kurze Begründung an.

Lösung: Ja, denn $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend und eine Nullfolge

c) Es gilt $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Berechnen Sie damit den Grenzwert der Reihe $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{6}{k^2}$.

Lösung: $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{6}{k^2} = \pi^2 - 6.$

d) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort −1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ■ Falsch Die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ ist konvergent.

☐ Wahr ■ Falsch Jede konvergente Folge ist monoton fallend und beschränkt.

3. (9.5 Punkte)

a) Wir betrachten die Funktion $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ p(x) = x^2 + 2x + 3$. Bestimmen Sie $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ derart, dass
$$p(x) = (x + x_0)^2 + y_0$$
für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt und geben Sie den Scheitelpunkt S der Parabel p an.

Lösung: $p(x) = (x + 1)^2 + 2$, also $x_0 = 1, y_0 = 2$, $S = (-1, 2)$.

b) Wir betrachten die gebrochenrationale Funktion
$$f\colon \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1}.$$

i) Bestimmen Sie durch Polynomdivision die Asymptote von f.

Lösung: $f(x) : (x - 1) = x + 2 + \frac{3}{x-1}$. Die Asymptote ist $a(x) = x + 2$.

ii) Berechnen Sie $\lim_{x \nearrow 1} f(x)$ und $\lim_{x \searrow 1} f(x)$.

Lösung: $\lim_{x \nearrow 1} f(x) = -\infty$ und $\lim_{x \searrow 1} f(x) = \infty$

iii) Entscheiden Sie anhand von i) oder ii), ob f ein globales Maximum hat.

Lösung: Nein

c) Gegeben ist die bijektive Funktion
$$g\colon (-\infty, 0) \to (0, \infty), \quad g(x) = \ln(x^2 + 1).$$
Bestimmen Sie die Umkehrfunktion von g.

Lösung: $g^{-1}\colon (0, \infty) \to (-\infty, 0),\ g^{-1}(x) = -\sqrt{e^x - 1}$

d) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ■ Falsch Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 1$ ist injektiv.

■ Wahr ☐ Falsch Mit den Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$ gilt $(g \circ f)(x) = \sin(x)^2$.

4. (13 Punkte)

a) Wir betrachten die Funktion

$$f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos(x)\big(\cos(x) + 3\big).$$

i) Bestimmen Sie alle Nullstellen von f.

Lösung: $\pm\frac{\pi}{2}$.

ii) Ist f gerade, ungerade oder beides nicht? Begründen Sie Ihre Antwort durch eine kurze Rechnung.

Lösung: f ist gerade, weil $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

iii) Bestimmen Sie alle globalen Extremalstellen von f.

Lösung: Globale Maximalstellen: $x = 0$. Globale Minimalstellen: $x = \pm\pi$.

b) Berechnen Sie die folgenden zwei Grenzwerte.

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+2x)}{x}$

ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+2x)}{1+x}$

Lösung:

i) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{x} = 2$ nach L'Hospital.

ii) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{1+x} = 0$.

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr ☐ Falsch — Wenn $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist und $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, dann ist f streng monoton wachsend.

☐ Wahr ■ Falsch — Wenn $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und streng monoton wachsend ist, dann gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

5. (10.5 Punkte)

a) Berechnen Sie die folgenden zwei Integrale.

i) $\int \frac{1}{\sqrt[5]{x}} dx$

ii) $\int_0^1 3^x dx$

Lösung:

i) $\int \frac{1}{\sqrt[5]{x}} dx = \frac{5}{4} x^{\frac{4}{5}} + c$

ii) $\int_0^1 3^x dx = \frac{2}{\ln(3)}$

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int \frac{3 \ln(x)^2}{x} dx$$

durch die Substitution $x = h(t) = e^t$.

Lösung: $\int \frac{3 \ln(x)^2}{x} dx = \ln(x)^3 + c$

c) Berechnen Sie das Integral

$$\int 2xe^{2x+3} dx$$

durch partielle Integration.

Lösung: $\int 2xe^{2x+3} dx = xe^{2x+3} - \frac{1}{2} e^{2x+3} + c$

d) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr ☐ Falsch Ist $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(x) \leq -1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\int_{11}^{17} f(x)\, dx < 0.$$

■ Wahr ☐ Falsch Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{17}^{x} \sin(t^2)\, dt \right) = \sin(x^2).$$

6. (7 Punkte)

a) Berechnen Sie das Taylor-Polynom 2. Grades der Funktion

$$f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 3x + \frac{1}{x}$$

zur Entwicklungsstelle $x_0 = 1$.

Lösung: $T(x;1) = 4 + 2(x-1) + (x-1)^2$

b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius r der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^n.$$

Lösung: $r = \frac{1}{2}$

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr ☐ Falsch Es gilt

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$.

■ Wahr ☐ Falsch Die Taylorreihe der Sinusfunktion konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.