Nachname:
Vorname:
Matrikelnummer:

Klausur zu
Höhere Mathematik I
BNUW
SoSe 2025

Gesamtzahl der Aufgaben: 6, Gesamtpunktzahl: 60, Bearbeitungszeit: 120 Minuten

1. (8 Punkte)
   a) Schreiben Sie die Menge
   $$I = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 10\} \setminus \{1, 2\}$$
   als Vereinigung von Intervallen.

   b) Die beiden Geraden
   $$g_1 : \boldsymbol{r} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R}, \qquad g_2 : \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mu \in \mathbb{R}$$
   sind parallel. Bestimmen Sie den Abstand d von g_1 und g_2.

   c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

   Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

   ☐ Wahr ☐ Falsch Es gilt $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ für alle $a, b \in [0, \infty)$.

   ☐ Wahr ☐ Falsch Es gilt $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

2. (12 Punkte)
   a) Berechnen Sie für die zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils den Grenzwert.

   i) $a_n = \dfrac{(2n+1)^2}{(3n+2)^2}$ ii) $b_n = \dfrac{4^n}{5^n} + \sqrt[n]{7}$

   b) Gegeben ist die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit
   $$c_n = \frac{1}{n^2 + 2n}.$$
   i) Zeigen Sie rechnerisch, dass die Folge streng monoton fallend ist.

   ii) Entscheiden Sie jeweils, ob das Infimum, Supremum, Minimum oder Maximum der Folge existieren und geben Sie diese gegebenenfalls an.

   iii) Entscheiden Sie, ob die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_n$ nach dem Leibniz-Kriterium konvergent ist. Geben Sie eine kurze Begründung an.

c) Es gilt $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Berechnen Sie damit den Grenzwert der Reihe $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{6}{k^2}$.

d) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☐ Falsch Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist konvergent.

☐ Wahr ☐ Falsch Jede konvergente Folge ist monoton fallend und beschränkt.

3. (9.5 Punkte)

a) Wir betrachten die Funktion $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ p(x) = x^2 + 2x + 3$. Bestimmen Sie $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$p(x) = (x + x_0)^2 + y_0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt und geben Sie den Scheitelpunkt S der Parabel p an.

b) Wir betrachten die gebrochenrationale Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1}.$$

i) Bestimmen Sie durch Polynomdivision die Asymptote von f.

ii) Berechnen Sie $\lim_{x \nearrow 1} f(x)$ und $\lim_{x \searrow 1} f(x)$.

iii) Entscheiden Sie anhand von i) oder ii), ob f ein globales Maximum hat.

c) Gegeben ist die bijektive Funktion

$$g\colon (-\infty, 0) \to (0, \infty), \quad g(x) = \ln(x^2 + 1).$$

Bestimmen Sie die Umkehrfunktion von g.

d) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☐ Falsch Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 1$ ist injektiv.

☐ Wahr ☐ Falsch Mit den Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin(x)$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x^2$ gilt $(g \circ f)(x) = \sin(x)^2$.

4. (13 Punkte)

a) Wir betrachten die Funktion

$$f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos(x)\big(\cos(x) + 3\big).$$

i) Bestimmen Sie alle Nullstellen von f.

ii) Ist f gerade, ungerade oder beides nicht? Begründen Sie Ihre Antwort durch eine kurze Rechnung.

iii) Bestimmen Sie alle globalen Extremalstellen von f.

b) Berechnen Sie die folgenden zwei Grenzwerte.

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+2x)}{x}$ ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+2x)}{1+x}$

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort −1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☐ Falsch Wenn $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist und $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, dann ist f streng monoton wachsend.

☐ Wahr ☐ Falsch Wenn $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und streng monoton wachsend ist, dann gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

5. (10.5 Punkte)

a) Berechnen Sie die folgenden zwei Integrale.

i) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[5]{x}}dx$ ii) $\displaystyle\int_0^1 3^x dx$

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int \frac{3\ln(x)^2}{x}dx$$

durch die Substitution $x = h(t) = e^t$.

c) Berechnen Sie das Integral

$$\int 2xe^{2x+3}dx$$

durch partielle Integration.

d) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort −1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☐ Falsch Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(x) \leq -1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\int_{11}^{17} f(x)\,dx < 0.$$

☐ Wahr ☐ Falsch Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{17}^{x} \sin(t^2)\,dt\right) = \sin(x^2).$$

6. (7 Punkte)

a) Berechnen Sie das Taylor-Polynom 2. Grades der Funktion

$$f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 3x + \frac{1}{x}$$

zur Entwicklungsstelle $x_0 = 1$.

b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius r der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^n.$$

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☐ Falsch Es gilt

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$.

☐ Wahr ☐ Falsch Die Taylorreihe der Sinusfunktion konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.