

Nachname:

Vorname:

Matrikelnummer:

**Klausur zu**  
**Höhere Mathematik II**  
**BNUW**  
**SoSe 2021**

**Gesamtzahl der Aufgaben: 6,      Gesamtpunktzahl: 60,      Bearbeitungszeit: 120 Minuten**

1. (8.5 Punkte)

a) Bestimmen Sie die kartesische Form der komplexen Zahl

$$z = \frac{1 - i}{2 + i}.$$

Geben Sie zusätzlich den Realteil und den Imaginärteil von  $z$  an.

b) Schreiben Sie das Polynom  $f$ ,

$$f(z) = z^3 + 1,$$

als ein Produkt von Linearfaktoren über  $\mathbb{C}$ . Geben Sie eventuell auftretende komplexe Zahlen in ihrer kartesischen Form an.

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Wahr    Falsch    $\text{Im}(200 + 5i) = 5i$

Wahr    Falsch    $e^{8\pi i}$  ist die Polardarstellung der Zahl 1.

Wahr    Falsch   Es sei  $f$  ein Polynom mit  $f(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ ,  $a_j \in \mathbb{R}$ ,  $j = 0, \dots, n$ ,  $a_n \neq 0$  und  $n \geq 1$ . Wenn  $z_0$  eine Nullstelle von  $f$  ist, so ist  $\bar{z}_0$  ebenfalls eine Nullstelle von  $f$ .

2. (10.5 Punkte)

a) Bringen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -3 & -6 & 4 \\ 1 & 4 & -7 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit dem Gauß-Algorithmus auf Dreiecksform. Vertauschen Sie Zeilen oder Spalten nur, wenn es zwingend erforderlich ist.

b) Bestimmen Sie in dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + \quad \quad \quad x_3 &= 2 \\ \quad \quad \quad x_2 + \quad \quad \quad 3x_3 &= -1 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad (4 - \alpha)x_3 &= 3\beta \end{aligned}$$

die Zahlen  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , für die das Gleichungssystem

- i) keine Lösung hat.
  - ii) genau eine Lösung hat. Berechnen Sie diese Lösung.
  - iii) unendlich viele Lösungen hat. Berechnen Sie alle Lösungen.
- c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Wahr  Falsch Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= 0 \\x_1 - x_2 &= 0 \\x_1^2 &= -1\end{aligned}$$

ist linear.

Wahr  Falsch Ein lineares Gleichungssystem  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  mit einer regulären  $n \times n$ -Matrix  $\mathbf{A}$  hat stets entweder keine oder unendlich viele Lösungen.

3. (13 Punkte)

a) Gegeben sind die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie falls möglich die folgenden Summen und Produkte.

i)  $\mathbf{A} + \mathbf{A}$                       ii)  $\mathbf{B} + \mathbf{B}^T$                       iii)  $\mathbf{BB}$                       iv)  $\mathbf{AB}^T$

b) Gegeben sind reguläre Matrizen  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit  $n \in \mathbb{N}$ . Lösen Sie die folgenden Matrixgleichungen formal nach  $\mathbf{X}$  auf. Dabei können Sie davon ausgehen, dass alle auftretenden Matrizen regulär sind.

- i)  $\mathbf{A} - \mathbf{BX} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{X}$
- ii)  $\mathbf{A} = \mathbf{X} + \mathbf{XB}$

c) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Zu welchem Eigenwert gehört der Eigenvektor  $\mathbf{x} = (1 \ 0 \ 0)^T$ ? Begründen Sie Ihre Antworten! Berechnen Sie weiterhin die Determinante von  $\mathbf{A}$  sowie die Inverse  $\mathbf{A}^{-1}$ .

d) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Wahr  Falsch Drei Vektoren im  $\mathbb{R}^2$  sind stets linear abhängig.

Wahr  Falsch Wegen  $\mathbf{A}\mathbf{0} = \mathbf{0} = \lambda\mathbf{0}$  für alle  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  ist  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  stets ein Eigenvektor.

4. (13 Punkte)

a) Bestimmen Sie die stationäre Stelle der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = x_1x_2 - x_1 + 7$$

und entscheiden Sie, ob es sich um ein Maximum, ein Minimum oder einen Sattelpunkt handelt.

b) Bestimmen Sie für die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = e^{x_1}x_2$$

an der Stelle  $\mathbf{x}_0 = (1, 2)$  das Taylor-Polynom ersten Grades.

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Wahr  Falsch Es gibt Teilmengen von  $\mathbb{R}^3$ , die weder abgeschlossen noch offen sind.

Wahr  Falsch Falls  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\mathbf{c}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  differenzierbar sind, dann gilt

$$(f \circ \mathbf{c})'(x) = \langle \mathbf{c}'(x), \text{grad } f(\mathbf{c}(x)) \rangle.$$

Wahr  Falsch Die Hesse-Matrix  $\mathbf{H}f(\mathbf{x})$  einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  ist stets symmetrisch.

5. (7 Punkte)

a) Berechnen Sie mithilfe eines Doppelintegrals die Fläche  $F$  des Normalbereichs

$$U = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}, \cos(y) \leq x \leq 1 \right\}$$

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^3 \int_0^x e^x e^y \, dy \, dx.$$

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Wahr  Falsch Für stetiges  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  gilt  $\int_0^1 \int_3^4 f(x, y) \, dy \, dx = \int_0^1 \int_3^4 f(x, y) \, dx \, dy$

Wahr  Falsch Für stetiges  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gilt  $\int_a^b \int_a^b g(x)g(y) \, dy \, dx = \left( \int_a^b g(x) \, dx \right)^2$

6. (8 Punkte)

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \frac{e^{-x}}{y^2}.$$

b) Zeigen Sie, dass die Funktion  $y(x) = \tan(\frac{1}{2}x^2 + C)$  die Differentialgleichung

$$y' = (1 + y^2)x$$

löst. Bestimmen Sie dann eine Lösung des Anfangswertproblems  $y(0) = 0$  zu dieser Differentialgleichung. Zur Erinnerung: Es gilt  $\tan'(x) = 1 + \tan(x)^2$ .

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Wahr  Falsch  $xy''' + x^2y'' + x^3y' + x^4y = x^{10}$  ist eine Differentialgleichung 10-ter Ordnung.

Wahr  Falsch Wenn  $y_1$  und  $y_2$  Lösungen von  $y' = 1 + y^2$  sind, so ist auch  $y_1 + y_2$  eine Lösung von  $y' = 1 + y^2$ .

Wahr  Falsch  $y' = e^x y + x^2$  ist eine lineare Differentialgleichung.