Klausur zu Höhere Mathematik II BNUW SoSe 2021

Gesamtzahl der Aufgaben: 6, Gesamtpunktzahl: 60, Bearbeitungszeit: 120 Minuten

1. (8.5 Punkte)

a) Bestimmen Sie die kartesische Form der komplexen Zahl

$$z = \frac{1 - \mathrm{i}}{2 + \mathrm{i}}.$$

Geben Sie zusätzlich den Realteil und den Imaginärteil von z an.

Ergebnis:
$\frac{1}{5} - \mathrm{i}\frac{3}{5}$

$\mathrm{Re}(z) = \dfrac{1}{5}$

$\mathrm{Im}(z) = -\dfrac{3}{5}$

b) Schreiben Sie das Polynom f,

$$f(z) = z^3 + 1,$$

als ein Produkt von Linearfaktoren über $\mathbb{C}$. Geben Sie eventuell auftretende komplexe Zahlen in ihrer kartesischen Form an.

Ergebnis:

$$f(z) = (z+1)\left(z - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\right)\left(z - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\right).$$

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort −1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ■ Falsch $\mathrm{Im}(200 + 5\mathrm{i}) = 5\mathrm{i}$

☐ Wahr ■ Falsch $e^{8\pi\mathrm{i}}$ ist die Polardarstellung der Zahl 1.

■ Wahr ☐ Falsch Es sei f ein Polynom mit $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, \ldots, n$, $a_n \neq 0$ und $n \geq 1$. Wenn z_0 eine Nullstelle von f ist, so ist $\overline{z_0}$ ebenfalls eine Nullstelle von f.

2. (10.5 Punkte)

a) Bringen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -3 & -6 & 4 \\ 1 & 4 & -7 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit dem Gauß-Algorithmus auf Dreiecksform. Vertauschen Sie Zeilen oder Spalten nur, wenn es zwingend erforderlich ist.

Ergebnis:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

b) Bestimmen Sie in dem linearen Gleichungssytem

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + \quad x_3 &= 2 \\ x_2 + \quad 3x_3 &= -1 \\ (4-\alpha)x_3 &= 3\beta \end{aligned}$$

die Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, für die das Gleichungssystem

i) keine Lösung hat.

ii) genau eine Lösung hat. Berechnen Sie diese Lösung.

iii) unendlich viele Lösungen hat. Berechnen Sie alle Lösungen.

Ergebnis:

i) Keine Lösung: $\alpha = 4$ und $\beta \neq 0$

ii) Genau eine Lösung: $\alpha \neq 4$ und $\beta \in \mathbb{R}$

$x_1 = 1 + \frac{2\beta}{4-\alpha}$, $x_2 = -1 - \frac{9\beta}{4-\alpha}$, $x_3 = \frac{3\beta}{4-\alpha}$

iii) Unendlich viele Lösungen: $\alpha = 4$ und $\beta = 0$

$x_1 = 1 + \frac{2t}{3}$, $x_2 = -1 - 3t$, $x_3 = t$

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort $+1$ Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ■ Falsch Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 - x_2 &= 0 \\ x_1^2 &= -1 \end{aligned}$$

ist linear.

☐ Wahr ■ Falsch Ein lineares Gleichungssystem $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ mit einer regulären $n \times n$-Matrix $\boldsymbol{A}$ hat stets entweder keine oder unendlich viele Lösungen.

3. (13 Punkte)

a) Gegeben sind die Matrizen

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie falls möglich die folgenden Summen und Produkte.

i) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}$ ii) $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^T$ iii) $\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}$ iv) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T$

Ergebnis:

$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

ii) $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^T$: Existiert nicht

iii) $\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}$: Existiert nicht

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

b) Gegeben sind reguläre Matrizen $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $n \in \mathbb{N}$. Lösen Sie die folgenden Matrixgleichungen formal nach $\boldsymbol{X}$ auf. Dabei können Sie davon ausgehen, dass alle auftretenden Matrizen regulär sind.

i) $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{X}$

ii) $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}\boldsymbol{B}$

Ergebnis:

$$\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B})^{-1}$$

c) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Zu welchem Eigenwert gehört der Eigenvektor $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$? Begründen Sie Ihre Antworten! Berechnen Sie weiterhin die Determinante von $\boldsymbol{A}$ sowie die Inverse $\boldsymbol{A}^{-1}$.

Ergebnis:

$$\lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = -2, \ \lambda_3 = -3.$$

$\boldsymbol{x}$ ist Eigenvektor zum Eigenwert -1

$$\det(\boldsymbol{A}) = -6.$$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & \frac{10}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

d) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr ☐ Falsch Drei Vektoren im $\mathbb{R}^2$ sind stets linear abhängig.

☐ Wahr ■ Falsch Wegen $\boldsymbol{A0} = \boldsymbol{0} = \lambda\boldsymbol{0}$ für alle $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ stets ein Eigenvektor.

4. (13 Punkte)

a) Bestimmen Sie die stationäre Stelle der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = x_1 x_2 - x_1 + 7$$

und entscheiden Sie, ob es sich um ein Maximum, ein Minimum oder einen Sattelpunkt handelt.

Ergebnis:
stationäre Stelle $(0, 1)$
$(0, 1)$ ist ein Sattelpunkt

b) Bestimmen Sie für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x_1, x_2) = e^{x_1} x_2$$

an der Stelle $\boldsymbol{x}_0 = (1, 2)$ das Taylor-Polynom ersten Grades.

Ergebnis:

$$T_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) = 2e + 2e(x_1 - 1) + e(x_2 - 2)$$

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr ☐ Falsch Es gibt Teilmengen von $\mathbb{R}^3$, die weder abgeschlossen noch offen sind.

■ Wahr ☐ Falsch Falls $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $\boldsymbol{c}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar sind, dann gilt

$$(f \circ \boldsymbol{c})'(x) = \langle \boldsymbol{c}'(x), \operatorname{grad} f(\boldsymbol{c}(x)) \rangle .$$

■ Wahr ☐ Falsch Die Hesse-Matrix $\boldsymbol{H} f(\boldsymbol{x})$ einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ ist stets symmetrisch.

5. (7 Punkte)

a) Berechnen Sie mithilfe eines Doppelintegrals die Fläche F des Normalbereichs

$$U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \le y \le \frac{\pi}{2},\ \cos(y) \le x \le 1\right\}$$

Ergebnis:

$F = \frac{\pi}{2} - 1$

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^3 \int_0^x e^x e^y \, dy \, dx.$$

Ergebnis:

$$\int_0^3 \int_0^x e^x e^y \, dy \, dx = \frac{1}{2}e^6 - e^3 + \frac{1}{2}$$

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort $+1$ Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ■ Falsch Für stetiges $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gilt $\int_0^1 \int_3^4 f(x,y)\, dy\, dx = \int_0^1 \int_3^4 f(x,y)\, dx\, dy$

■ Wahr ☐ Falsch Für stetiges $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt $\int_a^b \int_a^b g(x)g(y)\, dy\, dx = \left(\int_a^b g(x)\, dx\right)^2$

6. (8 Punkte)

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \frac{e^{-x}}{y^2}.$$

Ergebnis:

$$y(x) = \sqrt[3]{-3e^{-x} + C}, \quad C \in \mathbb{R}$$

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $y(x) = \tan(\frac{1}{2}x^2 + C)$ die Differentialgleichung

$$y' = (1 + y^2)x$$

löst. Bestimmen Sie dann eine Lösung des Anfangswertproblems $y(0) = 0$ zu dieser Differentialgleichung. Zur Erinnerung: Es gilt $\tan'(x) = 1 + \tan(x)^2$.

Ergebnis:

$$y(x) = \tan\left(\frac{1}{2}x^2\right)$$

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ■ Falsch $xy''' + x^2y'' + x^3y' + x^4y = x^{10}$ ist eine Differentialgleichung 10-ter Ordnung.

☐ Wahr ■ Falsch Wenn y_1 und y_2 Lösungen von $y' = 1 + y^2$ sind, so ist auch $y_1 + y_2$ eine Lösung von $y' = 1 + y^2$.

■ Wahr ☐ Falsch $y' = e^x y + x^2$ ist eine lineare Differentialgleichung.