# Klausur zu
# Höhere Mathematik II
# Maschinenbau
# SoSe 2021

**Gesamtzahl der Aufgaben: 5,** **Gesamtpunktzahl: 60,** **Bearbeitungszeit: 120 Minuten**

1. (8.5 Punkte)

a) Bestimmen Sie die kartesische Form der komplexen Zahl

$$z = \frac{1-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}.$$

Geben Sie zusätzlich den Realteil und den Imaginärteil von $z$ an.

**Ergebnis:**
$\frac{1}{5} - \mathrm{i}\frac{3}{5}$

$\mathrm{Re}(z) = \dfrac{1}{5}$

$\mathrm{Im}(z) = -\dfrac{3}{5}$

b) Schreiben Sie das Polynom $f$,

$$f(z) = z^3 + 1,$$

als ein Produkt von Linearfaktoren über $\mathbb{C}$. Geben Sie eventuell auftretende komplexe Zahlen in ihrer kartesischen Form an.

**Ergebnis:**

$$f(z) = (z+1)\left(z - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\right)\left(z - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\right).$$

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort −1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ■ Falsch $\mathrm{Im}(200 + 5\mathrm{i}) = 5\mathrm{i}$

☐ Wahr ■ Falsch $e^{8\pi\mathrm{i}}$ ist die Polardarstellung der Zahl 1.

■ Wahr ☐ Falsch Es sei $f$ ein Polynom mit $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, \ldots, n$, $a_n \neq 0$ und $n \geq 1$. Wenn $z_0$ eine Nullstelle von $f$ ist, so ist $\overline{z_0}$ ebenfalls eine Nullstelle von $f$.

2. (10.5 Punkte)

a) Bringen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -3 & -6 & 4 \\ 1 & 4 & -7 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit dem Gauß-Algorithmus auf Dreiecksform. Vertauschen Sie Zeilen oder Spalten nur, wenn es zwingend erforderlich ist.

**Ergebnis:**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

b) Bestimmen Sie in dem linearen Gleichungssytem

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + \quad x_3 &= 2 \\ x_2 + \quad 3x_3 &= -1 \\ (4-\alpha)x_3 &= 3\beta \end{aligned}$$

die Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, für die das Gleichungssystem

i) keine Lösung hat.

ii) genau eine Lösung hat. Berechnen Sie diese Lösung.

iii) unendlich viele Lösungen hat. Berechnen Sie alle Lösungen.

**Ergebnis:**

i) Keine Lösung: $\alpha = 4$ und $\beta \neq 0$

ii) Genau eine Lösung: $\alpha \neq 4$ und $\beta \in \mathbb{R}$

$x_1 = 1 + \frac{2\beta}{4-\alpha}$, $x_2 = -1 - \frac{9\beta}{4-\alpha}$, $x_3 = \frac{3\beta}{4-\alpha}$

iii) Unendlich viele Lösungen: $\alpha = 4$ und $\beta = 0$

$x_1 = 1 + \frac{2t}{3}$, $x_2 = -1 - 3t$, $x_3 = t$

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort −1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ■ Falsch Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 - x_2 &= 0 \\ x_1^2 &= -1 \end{aligned}$$

ist linear.

☐ Wahr ■ Falsch Ein lineares Gleichungssystem $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ mit einer regulären $n \times n$-Matrix $\boldsymbol{A}$ hat stets entweder keine oder unendlich viele Lösungen.

3. (13 Punkte)

a) Gegeben sind die Matrizen

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie falls möglich die folgenden Summen und Produkte.

i) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}$ ii) $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^T$ iii) $\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}$ iv) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T$

**Ergebnis:**

$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

ii) $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^T$: Existiert nicht

iii) $\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}$: Existiert nicht

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

b) Gegeben sind reguläre Matrizen $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $n \in \mathbb{N}$. Lösen Sie die folgenden Matrixgleichungen formal nach $\boldsymbol{X}$ auf. Dabei können Sie davon ausgehen, dass alle auftretenden Matrizen regulär sind.

i) $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{X}$

ii) $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}\boldsymbol{B}$

**Ergebnis:**

$$\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B})^{-1}$$

c) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Zu welchem Eigenwert gehört der Eigenvektor $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$? Begründen Sie Ihre Antworten!
Berechnen Sie weiterhin die Determinante von $\boldsymbol{A}$ sowie die Inverse $\boldsymbol{A}^{-1}$.

**Ergebnis:**

$$\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = -3.$$

$\boldsymbol{x}$ ist Eigenvektor zum Eigenwert $-1$

$$\det(\boldsymbol{A}) = -6.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & \frac{10}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

d) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* $0$ *Punkte, jede falsche Antwort* $-1$ *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr ☐ Falsch Drei Vektoren im $\mathbb{R}^2$ sind stets linear abhängig.

☐ Wahr ■ Falsch Wegen $\boldsymbol{A0} = \boldsymbol{0} = \lambda\boldsymbol{0}$ für alle $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ stets ein Eigenvektor.

4. (13 Punkte)

a) Bestimmen Sie die stationäre Stelle der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = x_1 x_2 - x_1 + 7$$

und entscheiden Sie, ob es sich um ein Maximum, ein Minimum oder einen Sattelpunkt handelt.

**Ergebnis:**
stationäre Stelle $(0, 1)$
$(0, 1)$ ist ein Sattelpunkt

b) Bestimmen Sie für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x_1, x_2) = e^{x_1} x_2$$

an der Stelle $\boldsymbol{x}_0 = (1, 2)$ das Taylor-Polynom ersten Grades.

**Ergebnis:**

$$T_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) = 2e + 2e(x_1 - 1) + e(x_2 - 2)$$

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* $0$ *Punkte, jede falsche Antwort* $-1$ *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr ☐ Falsch Es gibt Teilmengen von $\mathbb{R}^3$, die weder abgeschlossen noch offen sind.

■ Wahr ☐ Falsch Falls $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $\boldsymbol{c}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar sind, dann gilt

$$(f \circ \boldsymbol{c})'(x) = \langle \boldsymbol{c}'(x), \operatorname{grad} f(\boldsymbol{c}(x)) \rangle .$$

■ Wahr ☐ Falsch Die Hesse-Matrix $\boldsymbol{H} f(\boldsymbol{x})$ einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ ist stets symmetrisch.

5. (15 Punkte)

a) Berechnen Sie für den Normalbereich

$$U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, -1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x^2\right\}$$

das Integral

$$I = \iint_U x e^y \, dy \, dx$$

**Ergebnis:**
$I = 0$

b) Berechnen Sie mithilfe eines Doppelintegrals die Fläche $F$ des Normalbereichs

$$U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2},\ \cos(y) \leq x \leq 1\right\}$$

**Ergebnis:**
$F = \dfrac{\pi}{2} - 1$

c) Zu einer stetigen Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ betrachten wir das Integral

$$\int_0^1 \int_{x^2}^1 f(x,y)\, dy\, dx.$$

Bestimmen Sie die Integrationsgrenzen nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge, d. h. finden Sie $a$, $b$, $x_0(y)$ und $x_1(y)$, sodass

$$\int_0^1 \int_{x^2}^1 f(x,y)\, dy\, dx = \int_a^b \int_{x_0(y)}^{x_1(y)} f(x,y)\, dx\, dy.$$

gilt.

**Ergebnis:**

$$a = 0,\ b = 1,\ x_0(y) = 0,\ x_1(y) = \sqrt{y}.$$

d) Berechnen Sie das Integral

$$I = \iint_U \sin(x^2 + y^2)\, dy\, dx,\ U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq \pi\right\}$$

mittels Polarkoordinaten.

**Ergebnis:**
$I = 2\pi$

e) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* $0$ *Punkte, jede falsche Antwort* $-1$ *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ■ Falsch Für stetiges $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gilt $\displaystyle\int_0^1 \int_3^4 f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1 \int_3^4 f(x,y)\,dx\,dy$

■ Wahr ☐ Falsch Für stetiges $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt $\displaystyle\int_a^b \int_a^b g(x)g(y)\,dy\,dx = \left(\int_a^b g(x)\,dx\right)^2$