Nachname:

Vorname:

Matrikelnummer:

Klausur zu Höhere Mathematik II Maschinenbau SoSe 2021

Gesamtzahl der Aufgaben: 5, Gesamtpunktzahl: 60, Bearbeitungszeit: 120 Minuten

1. (8.5 Punkte)

   a) Bestimmen Sie die kartesische Form der komplexen Zahl

   $$z = \frac{1 - \mathrm{i}}{2 + \mathrm{i}}.$$

   Geben Sie zusätzlich den Realteil und den Imaginärteil von z an.

   b) Schreiben Sie das Polynom f,

   $$f(z) = z^3 + 1,$$

   als ein Produkt von Linearfaktoren über $\mathbb{C}$. Geben Sie eventuell auftretende komplexe Zahlen in ihrer kartesischen Form an.

   c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

   Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

   ☐ Wahr ☐ Falsch $\mathrm{Im}(200 + 5\mathrm{i}) = 5\mathrm{i}$

   ☐ Wahr ☐ Falsch $e^{8\pi \mathrm{i}}$ ist die Polardarstellung der Zahl 1.

   ☐ Wahr ☐ Falsch Es sei f ein Polynom mit $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, \ldots, n$, $a_n \neq 0$ und $n \geq 1$. Wenn z_0 eine Nullstelle von f ist, so ist $\overline{z_0}$ ebenfalls eine Nullstelle von f.

2. (10.5 Punkte)

   a) Bringen Sie das Gleichungssystem

   $$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -3 & -6 & 4 \\ 1 & 4 & -7 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   mit dem Gauß-Algorithmus auf Dreiecksform. Vertauschen Sie Zeilen oder Spalten nur, wenn es zwingend erforderlich ist.

   b) Bestimmen Sie in dem linearen Gleichungssytem

   $$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + \quad\quad x_3 &= 2 \\ x_2 + \quad 3x_3 &= -1 \\ (4-\alpha)x_3 &= 3\beta \end{aligned}$$

   die Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, für die das Gleichungssystem

i) keine Lösung hat.

ii) genau eine Lösung hat. Berechnen Sie diese Lösung.

iii) unendlich viele Lösungen hat. Berechnen Sie alle Lösungen.

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort −1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☐ Falsch Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 - x_2 &= 0 \\ x_1^2 &= -1 \end{aligned}$$

ist linear.

☐ Wahr ☐ Falsch Ein lineares Gleichungssystem $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ mit einer regulären $n \times n$-Matrix $\boldsymbol{A}$ hat stets entweder keine oder unendlich viele Lösungen.

3. (13 Punkte)

a) Gegeben sind die Matrizen

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie falls möglich die folgenden Summen und Produkte.

i) $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}$ ii) $\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}^T$ iii) $\boldsymbol{BB}$ iv) $\boldsymbol{AB}^T$

b) Gegeben sind reguläre Matrizen $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $n \in \mathbb{N}$. Lösen Sie die folgenden Matrixgleichungen formal nach $\boldsymbol{X}$ auf. Dabei können Sie davon ausgehen, dass alle auftretenden Matrizen regulär sind.

i) $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BX} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{X}$

ii) $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{XB}$

c) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Zu welchem Eigenwert gehört der Eigenvektor $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$? Begründen Sie Ihre Antworten!

Berechnen Sie weiterhin die Determinante von $\boldsymbol{A}$ sowie die Inverse $\boldsymbol{A}^{-1}$.

d) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort −1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☐ Falsch Drei Vektoren im $\mathbb{R}^2$ sind stets linear abhängig.

☐ Wahr ☐ Falsch Wegen $\boldsymbol{A0} = \mathbf{0} = \lambda\mathbf{0}$ für alle $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ stets ein Eigenvektor.

4. (13 Punkte)

   a) Bestimmen Sie die stationäre Stelle der Funktion

   $$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = x_1x_2 - x_1 + 7$$

   und entscheiden Sie, ob es sich um ein Maximum, ein Minimum oder einen Sattelpunkt handelt.

   b) Bestimmen Sie für die Funktion

   $$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x_1, x_2) = e^{x_1}x_2$$

   an der Stelle $\boldsymbol{x}_0 = (1, 2)$ das Taylor-Polynom ersten Grades.

   c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort $+1$ Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

   Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

   ☐ Wahr ☐ Falsch Es gibt Teilmengen von $\mathbb{R}^3$, die weder abgeschlossen noch offen sind.

   ☐ Wahr ☐ Falsch Falls $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $\boldsymbol{c}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar sind, dann gilt

   $$(f \circ \boldsymbol{c})'(x) = \langle \boldsymbol{c}'(x), \operatorname{grad} f(\boldsymbol{c}(x))\rangle\,.$$

   ☐ Wahr ☐ Falsch Die Hesse-Matrix $\boldsymbol{H}f(\boldsymbol{x})$ einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ ist stets symmetrisch.

5. (15 Punkte)

   a) Berechnen Sie für den Normalbereich

   $$U = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^2\right\}$$

   das Integral

   $$I = \iint_U xe^y \, dy \, dx$$

   b) Berechnen Sie mithilfe eines Doppelintegrals die Fläche F des Normalbereichs

   $$U = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \le y \le \frac{\pi}{2},\ \cos(y) \le x \le 1\right\}$$

   c) Zu einer stetigen Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ betrachten wir das Integral

   $$\int_0^1 \int_{x^2}^1 f(x, y) \, dy \, dx.$$

   Bestimmen Sie die Integrationsgrenzen nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge, d. h. finden Sie a, b, $x_0(y)$ und $x_1(y)$, sodass

   $$\int_0^1 \int_{x^2}^1 f(x, y) \, dy \, dx = \int_a^b \int_{x_0(y)}^{x_1(y)} f(x, y) \, dx \, dy.$$

   gilt.

d) Berechnen Sie das Integral

$$I = \iint_U \sin(x^2+y^2)\,dy\,dx,\ U = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2 \leq \pi\right\}$$

mittels Polarkoordinaten.

e) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☐ Falsch Für stetiges $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gilt $\displaystyle\int_0^1 \int_3^4 f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1 \int_3^4 f(x,y)\,dx\,dy$

☐ Wahr ☐ Falsch Für stetiges $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt $\displaystyle\int_a^b \int_a^b g(x)g(y)\,dy\,dx = \left(\int_a^b g(x)\,dx\right)^2$