

Klausur zu
Höhere Mathematik II
BNUW
WiSe 2021/2022

Gesamtzahl der Aufgaben: 6, Gesamtpunktzahl: 60, Bearbeitungszeit: 120 Minuten

1. (10 Punkte)

a) Bestimmen Sie die kartesische Form von

$$z = \frac{1+i}{1-i+2(i-1)}.$$

Lösung: $z = \frac{1+i}{1-i+2(i-1)} = -i$

b) Geben Sie die Lösungen von

$$(z+1)^3 = -1$$

in kartesischer Form an. Sie können dazu die folgende Tabelle nutzen.

ϕ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin \phi$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos \phi$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Lösung: $z_0 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, z_1 = -2, z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$

c) Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr □ Falsch Es gilt $e^{3i\pi} = -1$.

■ Wahr □ Falsch Ist $z_1 = 2 - 3i$ Nullstelle eines Polynoms mit reellen Koeffizienten, dann ist auch $z_2 = 2 + 3i$ Nullstelle dieses Polynoms.

□ Wahr ■ Falsch Für $z = \pi + i\sqrt{2}$ gilt $\operatorname{Im}(z) = i\sqrt{2}$.

2. (7 Punkte)

- a) Bestimmen Sie durch den Gauß-Algorithmus die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Tauschen Sie Zeilen oder Spalten nur falls dies zwingend erforderlich ist.

Lösung: Es existiert keine Lösung.

- b) Bestimmen Sie durch den Gauß-Algorithmus die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Tauschen Sie Zeilen oder Spalten nur falls dies zwingend erforderlich ist.

Lösung: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R}$

- c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☒ Falsch Es gibt lineare Gleichungssysteme $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ die genau zwei Lösungen haben.

☒ Wahr ☐ Falsch Sind $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ jeweils Lösungen von $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ mit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dann ist auch $\mathbf{y} = 2\mathbf{x}_1 - 3\mathbf{x}_2$ eine Lösung dieses linearen Gleichungssystems.

3. (13 Punkte) Gegeben sind

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & -8 & 2 \\ -2 & 5 & -2 \\ 16 & 26 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte von $\mathbf{A}$.

Lösung: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = i\sqrt{3}, \lambda_3 = -i\sqrt{3}$

b) Berechnen Sie alle Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda = 3$ von $\mathbf{B}$.

Lösung: $\mathbf{v} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, t \neq 0$

c) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit Hilfe der inversen Matrix $\mathbf{C}^{-1}$.

Hinweis: Für andere Lösungswege werden keine Punkte vergeben.

Lösung: $\mathbf{x} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

d) Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☒ Falsch Ist $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$, dann ist $\mathbf{A}^T \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

☐ Wahr ☒ Falsch Ist $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar, dann sind die Spalten von $\mathbf{A}$ linear abhängig.

☒ Wahr ☐ Falsch Gilt $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ für $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dann ist $\mathbf{A}$ invertierbar.

4. (17 Punkte)

a) Gegeben sind $\mathbf{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ und $\mathbf{g}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\mathbf{f}(x_1, x_2) = (x_2, -x_1)^T, \quad \mathbf{g}(x_1, x_2) = (x_1 x_2, 2x_1 - x_2)^T.$$

Bestimmen Sie die Verfahrensvorschrift von $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Lösung: $(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(x_1, x_2) = (-x_1 x_2, 2x_2 + x_1)^T.$

b) Berechnen Sie für die Funktion

$$\mathbf{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{f}(x_1, x_2) = (x_1 x_2, (x_1 + x_2)^2)^T$$

im Punkt $\mathbf{x}_0 = (1, 2)$ die Richtungsableitung in Richtung $\mathbf{e} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^T$.

Lösung: $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{e}}(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix}$

c) Berechnen Sie für die Funktion

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = \cos\left(\frac{\pi}{2} x_1 x_2\right)$$

die maximale Steigung im Punkt $\mathbf{x}_0 = (1, 3)$. Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Lösung: $\|\text{grad } f(1, 3)\| = \pi \sqrt{\frac{5}{2}}$

d) Berechnen Sie für

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = e^{x_1 x_2}$$

die stationären Punkte. Entscheiden Sie jeweils ob es sich um eine Maximal- oder Minimalstelle bzw. um einen Sattelpunkt handelt.

Lösung: $\mathbf{x} = (0, 0)$ ist ein Sattelpunkt

e) Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☒ Wahr ☐ Falsch Sei $\mathbf{x}_0$ ein stationärer Punkt einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Ist die Hesse-Matrix $\mathbf{H}f(\mathbf{x}_0)$ negativ definit, so stellt $\mathbf{x}_0$ eine echte lokale Maximalstelle dar.

☐ Wahr ☒ Falsch Ist $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $\mathbf{x}_0$ partiell differenzierbar, so ist f in $\mathbf{x}_0$ (total) differenzierbar.

☐ Wahr ☒ Falsch Die Höhenlinien von $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ sind Geraden in der (x_1, x_2) -Ebene.

5. (6.5 Punkte)

a) Gegeben ist

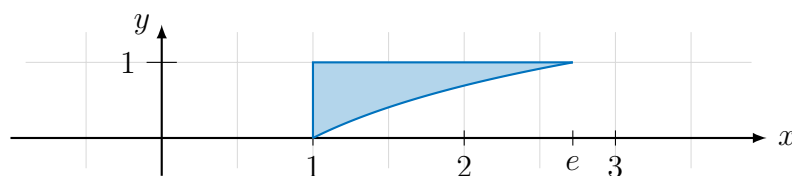
$$I = \int_1^e \int_{\ln(x)}^1 x e^y dy dx.$$

i) Berechnen Sie I . Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Lösung: $I = \frac{e^3}{6} - \frac{e}{2} + \frac{1}{3}$

ii) Skizzieren Sie den I zugrundeliegenden Normalbereich.

Lösung:



b) Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☒ Wahr ☐ Falsch Für den Flächeninhalt $|U|$ eines Normalbereichs U gilt

$$|U| = \iint_U 1 dx dy.$$

☐ Wahr ☒ Falsch Ist $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann gilt

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy.$$

6. (6.5 Punkte)

a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \frac{\cos(x)}{12y^5}, \quad y(0) = 2.$$

Lösung: $y(x) = \sqrt[6]{\frac{1}{2} \sin(x) + 64}$

b) Berechnen Sie ein reelles Fundamentalsystem der linearen Differentialgleichung

$$y'' - 4y' + 5y = 0.$$

Lösung: $y_1(x) = e^{2x} \cos(x), \quad y_2(x) = e^{2x} \sin(x)$