

Nachname:

Vorname:

Matrikelnummer:

Klausur zu  
Höhere Mathematik II  
BNUW  
WiSe 2021/2022

Gesamtzahl der Aufgaben: 6,      Gesamtpunktzahl: 60,      Bearbeitungszeit: 120 Minuten

1. (10 Punkte)

a) Bestimmen Sie die kartesische Form von

$$z = \frac{1 + i}{1 - i + 2(i - 1)}.$$

b) Geben Sie die Lösungen von

$$(z + 1)^3 = -1$$

in kartesischer Form an. Sie können dazu die folgende Tabelle nutzen.

| $\phi$      | 0 | $\frac{\pi}{6}$      | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{3}$      | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$     | $\frac{3\pi}{4}$      | $\frac{5\pi}{6}$      | $\pi$ | $\frac{7\pi}{6}$      | $\frac{5\pi}{4}$      | $\frac{4\pi}{3}$      | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{3}$      | $\frac{7\pi}{4}$      | $\frac{11\pi}{6}$    | $2\pi$ |
|-------------|---|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|-------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|------------------|-----------------------|-----------------------|----------------------|--------|
| $\sin \phi$ | 0 | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1               | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$  | $\frac{1}{2}$         | 0     | $-\frac{1}{2}$        | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | -1               | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$       | 0      |
| $\cos \phi$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0               | $-\frac{1}{2}$       | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | -1    | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$        | 0                | $\frac{1}{2}$         | $\frac{\sqrt{2}}{2}$  | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1      |

c) Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr   ☐ Falsch   Es gilt  $e^{3i\pi} = -1$ .

☐ Wahr   ☐ Falsch   Ist  $z_1 = 2 - 3i$  Nullstelle eines Polynoms mit reellen Koeffizienten, dann ist auch  $z_2 = 2 + 3i$  Nullstelle dieses Polynoms.

☐ Wahr   ☐ Falsch   Für  $z = \pi + i\sqrt{2}$  gilt  $\operatorname{Im}(z) = i\sqrt{2}$ .

2. (7 Punkte)

a) Bestimmen Sie durch den Gauß-Algorithmus die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Tauschen Sie Zeilen oder Spalten nur falls dies zwingend erforderlich ist.

- b) Bestimmen Sie durch den Gauß-Algorithmus die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Tauschen Sie Zeilen oder Spalten nur falls dies zwingend erforderlich ist.

- c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☐ Falsch Es gibt lineare Gleichungssysteme  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  mit  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$  die genau zwei Lösungen haben.

☐ Wahr ☐ Falsch Sind  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$  jeweils Lösungen von  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  mit  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , dann ist auch  $\mathbf{y} = 2\mathbf{x}_1 - 3\mathbf{x}_2$  eine Lösung dieses linearen Gleichungssystems.

3. (13 Punkte) Gegeben sind

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & -8 & 2 \\ -2 & 5 & -2 \\ 16 & 26 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- a) Berechnen Sie die Eigenwerte von  $\mathbf{A}$ .
- b) Berechnen Sie alle Eigenvektoren zum Eigenwert  $\lambda = 3$  von  $\mathbf{B}$ .
- c) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem  $\mathbf{Cx} = \mathbf{b}$  mit Hilfe der inversen Matrix  $\mathbf{C}^{-1}$ .  
*Hinweis:* Für andere Lösungswege werden keine Punkte vergeben.
- d) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☐ Falsch Ist  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ , dann ist  $\mathbf{A}^T \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ .

☐ Wahr ☐ Falsch Ist  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  invertierbar, dann sind die Spalten von  $\mathbf{A}$  linear abhängig.

☐ Wahr ☐ Falsch Gilt  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$  für  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , dann ist  $\mathbf{A}$  invertierbar.

4. (17 Punkte)

a) Gegeben sind  $\mathbf{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  und  $\mathbf{g}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit

$$\mathbf{f}(x_1, x_2) = (x_2, -x_1)^T, \quad \mathbf{g}(x_1, x_2) = (x_1 x_2, 2x_1 - x_2)^T.$$

Bestimmen Sie die Verfahrensvorschrift von  $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

b) Berechnen Sie für die Funktion

$$\mathbf{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{f}(x_1, x_2) = (x_1 x_2, (x_1 + x_2)^2)^T$$

im Punkt  $\mathbf{x}_0 = (1, 2)$  die Richtungsableitung in Richtung  $\mathbf{e} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^T$ .

c) Berechnen Sie für die Funktion

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x_1 x_2\right)$$

die maximale Steigung im Punkt  $\mathbf{x}_0 = (1, 3)$ . Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

d) Berechnen Sie für

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = e^{x_1 x_2}$$

die stationären Punkte. Entscheiden Sie jeweils ob es sich um eine Maximal- oder Minimalstelle bzw. um einen Sattelpunkt handelt.

e) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr   ☐ Falsch   Sei  $\mathbf{x}_0$  ein stationärer Punkt einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Ist die Hesse-Matrix  $\mathbf{H}f(\mathbf{x}_0)$  negativ definit, so stellt  $\mathbf{x}_0$  eine echte lokale Maximalstelle dar.

☐ Wahr   ☐ Falsch   Ist  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  im Punkt  $\mathbf{x}_0$  partiell differenzierbar, so ist  $f$  in  $\mathbf{x}_0$  (total) differenzierbar.

☐ Wahr   ☐ Falsch   Die Höhenlinien von  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$  sind Geraden in der  $(x_1, x_2)$ -Ebene.

5. (6.5 Punkte)

a) Gegeben ist

$$I = \int_1^e \int_{\ln(x)}^1 x e^y dy dx.$$

i) Berechnen Sie  $I$ . Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

ii) Skizzieren Sie den  $I$  zugrundeliegenden Normalbereich.

b) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☐ Falsch Für den Flächeninhalt  $|U|$  eines Normalbereichs  $U$  gilt

$$|U| = \iint_U 1 dx dy.$$

☐ Wahr ☐ Falsch Ist  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, dann gilt

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy.$$

6. (6.5 Punkte)

a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \frac{\cos(x)}{12y^5}, \quad y(0) = 2.$$

b) Berechnen Sie ein reelles Fundamentalsystem der linearen Differentialgleichung

$$y'' - 4y' + 5y = 0.$$