

Nachname:

Vorname:

Matrikelnummer:

Klausur zu
Höhere Mathematik II
Maschinenbau
WiSe 2021/2022

Gesamtzahl der Aufgaben: 5, Gesamtpunktzahl: 60, Bearbeitungszeit: 120 Minuten

1. (10 Punkte)

a) Bestimmen Sie die kartesische Form von

$$z = \frac{1 + i}{1 - i + 2(i - 1)}.$$

b) Geben Sie die Lösungen von

$$(z + 1)^3 = -1$$

in kartesischer Form an. Sie können dazu die folgende Tabelle nutzen.

ϕ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin \phi$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos \phi$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Wahr Falsch Es gilt $e^{3i\pi} = -1$.

Wahr Falsch Ist $z_1 = 2 - 3i$ Nullstelle eines Polynoms mit reellen Koeffizienten, dann ist auch $z_2 = 2 + 3i$ Nullstelle dieses Polynoms.

Wahr Falsch Für $z = \pi + i\sqrt{2}$ gilt $\text{Im}(z) = i\sqrt{2}$.

2. (7 Punkte)

a) Bestimmen Sie durch den Gauß-Algorithmus die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Tauschen Sie Zeilen oder Spalten nur falls dies zwingend erforderlich ist.

- b) Bestimmen Sie durch den Gauß-Algorithmus die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Tauschen Sie Zeilen oder Spalten nur falls dies zwingend erforderlich ist.

- c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Wahr Falsch Es gibt lineare Gleichungssysteme $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ die genau zwei Lösungen haben.

Wahr Falsch Sind $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ jeweils Lösungen von $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ mit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dann ist auch $\mathbf{y} = 2\mathbf{x}_1 - 3\mathbf{x}_2$ eine Lösung dieses linearen Gleichungssystems.

3. (13 Punkte) Gegeben sind

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & -8 & 2 \\ -2 & 5 & -2 \\ 16 & 26 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- a) Berechnen Sie die Eigenwerte von \mathbf{A} .
- b) Berechnen Sie alle Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda = 3$ von \mathbf{B} .
- c) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Cx} = \mathbf{b}$ mit Hilfe der inversen Matrix \mathbf{C}^{-1} .
Hinweis: Für andere Lösungswege werden keine Punkte vergeben.
- d) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Wahr Falsch Ist $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$, dann ist $\mathbf{A}^T \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

Wahr Falsch Ist $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar, dann sind die Spalten von \mathbf{A} linear abhängig.

Wahr Falsch Gilt $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ für $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dann ist \mathbf{A} invertierbar.

4. (17 Punkte)

a) Gegeben sind $\mathbf{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ und $\mathbf{g}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\mathbf{f}(x_1, x_2) = (x_2, -x_1)^T, \quad \mathbf{g}(x_1, x_2) = (x_1 x_2, 2x_1 - x_2)^T.$$

Bestimmen Sie die Verfahrensvorschrift von $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

b) Berechnen Sie für die Funktion

$$\mathbf{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{f}(x_1, x_2) = (x_1 x_2, (x_1 + x_2)^2)^T$$

im Punkt $\mathbf{x}_0 = (1, 2)$ die Richtungsableitung in Richtung $\mathbf{e} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^T$.

c) Berechnen Sie für die Funktion

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x_1 x_2\right)$$

die maximale Steigung im Punkt $\mathbf{x}_0 = (1, 3)$. Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

d) Berechnen Sie für

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = e^{x_1 x_2}$$

die stationären Punkte. Entscheiden Sie jeweils ob es sich um eine Maximal- oder Minimalstelle bzw. um einen Sattelpunkt handelt.

e) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Wahr Falsch Sei \mathbf{x}_0 ein stationärer Punkt einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Ist die Hesse-Matrix $\mathbf{H}f(\mathbf{x}_0)$ negativ definit, so stellt \mathbf{x}_0 eine echte lokale Maximalstelle dar.

Wahr Falsch Ist $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt \mathbf{x}_0 partiell differenzierbar, so ist f in \mathbf{x}_0 (total) differenzierbar.

Wahr Falsch Die Höhenlinien von $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ sind Geraden in der (x_1, x_2) -Ebene.

5. (13 Punkte)

a) Gegeben ist

$$I = \int_1^e \int_{\ln(x)}^1 x e^y dy dx.$$

i) Berechnen Sie I . Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

ii) Skizzieren Sie den I zugrundeliegenden Normalbereich.

iii) Geben Sie I mit vertauschter Integrationsreihenfolge an.

b) Skizzieren Sie

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$$

und berechnen Sie mittels Polarkoordinaten das Integral

$$\iint_U \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy.$$

Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Wahr Falsch Für den Flächeninhalt $|U|$ eines Normalbereichs U gilt

$$|U| = \iint_U 1 dx dy.$$

Wahr Falsch Ist $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann gilt

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy.$$