Klausur zu Höhere Mathematik II Maschinenbau WiSe 2021/2022

Gesamtzahl der Aufgaben: 5, Gesamtpunktzahl: 60, Bearbeitungszeit: 120 Minuten

1. (10 Punkte)

a) Bestimmen Sie die kartesische Form von

$$z = \frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}+2(\mathrm{i}-1)}.$$

Lösung: $z = \dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}+2(\mathrm{i}-1)} = -\mathrm{i}$

b) Geben Sie die Lösungen von

$$(z+1)^3 = -1$$

in kartesischer Form an. Sie können dazu die folgende Tabelle nutzen.

ϕ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin\phi$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\phi$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Lösung: $z_0 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$, $z_1 = -2$, $z_2 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort −1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr ☐ Falsch Es gilt $e^{3\mathrm{i}\pi} = -1$.

■ Wahr ☐ Falsch Ist $z_1 = 2-3\mathrm{i}$ Nullstelle eines Polynoms mit reellen Koeffizienten, dann ist auch $z_2 = 2+3\mathrm{i}$ Nullstelle dieses Polynoms.

☐ Wahr ■ Falsch Für $z = \pi + \mathrm{i}\sqrt{2}$ gilt $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{i}\sqrt{2}$.

2. (7 Punkte)

a) Bestimmen Sie durch den Gauß-Algorithmus die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ mit

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Tauschen Sie Zeilen oder Spalten nur falls dies zwingend erforderlich ist.

Lösung: Es existiert keine Lösung.

b) Bestimmen Sie durch den Gauß-Algorithmus die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ mit

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Tauschen Sie Zeilen oder Spalten nur falls dies zwingend erforderlich ist.

Lösung: $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; s, t \in \mathbb{R}$

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ■ Falsch Es gibt lineare Gleichungssysteme $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ die genau zwei Lösungen haben.

■ Wahr ☐ Falsch Sind $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ jeweils Lösungen von $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ mit $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dann ist auch $\boldsymbol{y} = 2\boldsymbol{x}_1 - 3\boldsymbol{x}_2$ eine Lösung dieses linearen Gleichungssystems.

3. (13 Punkte) Gegeben sind

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & -8 & 2 \\ -2 & 5 & -2 \\ 16 & 26 & -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$.

Lösung: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \mathrm{i}\sqrt{3}$, $\lambda_3 = -\mathrm{i}\sqrt{3}$

b) Berechnen Sie alle Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda = 3$ von $\boldsymbol{B}$.

Lösung: $\boldsymbol{v} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, t \neq 0$

c) Lösen Sie das lineare Gleichungssytem $\boldsymbol{Cx} = \boldsymbol{b}$ mit Hilfe der inversen Matrix $\boldsymbol{C}^{-1}$.

Hinweis: Für andere Lösungswege werden keine Punkte vergeben.

Lösung: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

d) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ■ Falsch Ist $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$, dann ist $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

☐ Wahr ■ Falsch Ist $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar, dann sind die Spalten von $\boldsymbol{A}$ linear abhängig.

■ Wahr ☐ Falsch Gilt $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$ für $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, dann ist $\boldsymbol{A}$ invertierbar.

4. (17 Punkte)

a) Gegeben sind $\boldsymbol{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $\boldsymbol{g}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\boldsymbol{f}(x_1, x_2) = (x_2, -x_1)^T, \quad \boldsymbol{g}(x_1, x_2) = (x_1 x_2, 2x_1 - x_2)^T.$$

Bestimmen Sie die Verfahrensvorschrift von $\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Lösung: $(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})(x_1, x_2) = (-x_1 x_2, 2x_2 + x_1)^T$.

b) Berechnen Sie für die Funktion

$$\boldsymbol{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \boldsymbol{f}(x_1, x_2) = \left(x_1 x_2, (x_1 + x_2)^2\right)^T$$

im Punkt $\boldsymbol{x}_0 = (1, 2)$ die Richtungsableitung in Richtung $\boldsymbol{e} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^T$.

Lösung: $\dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{e}}(\boldsymbol{x}_0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix}$

c) Berechnen Sie für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f(x_1, x_2) = \cos\left(\frac{\pi}{2} x_1 x_2\right)$$

die maximale Steigung im Punkt $\boldsymbol{x}_0 = (1, 3)$. Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Lösung: $\|\operatorname{grad} f(1, 3)\| = \pi\sqrt{\dfrac{5}{2}}$

d) Berechnen Sie für

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x_1, x_2) = e^{x_1 x_2}$$

die stationären Punkte. Entscheiden Sie jeweils ob es sich um eine Maximal- oder Minimalstelle bzw. um einen Sattelpunkt handelt.

Lösung: $\boldsymbol{x} = (0, 0)$ ist ein Sattelpunkt

e) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr ☐ Falsch — Sei $\boldsymbol{x}_0$ ein stationärer Punkt einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Ist die Hesse-Matrix $\boldsymbol{H}f(\boldsymbol{x}_0)$ negativ definit, so stellt $\boldsymbol{x}_0$ eine echte lokale Maximalstelle dar.

☐ Wahr ■ Falsch — Ist $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ im Punkt $\boldsymbol{x}_0$ partiell differenzierbar, so ist f in $\boldsymbol{x}_0$ (total) differenzierbar.

☐ Wahr ■ Falsch — Die Höhenlinien von $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ sind Geraden in der (x_1, x_2)-Ebene.

5. (13 Punkte)

a) Gegeben ist

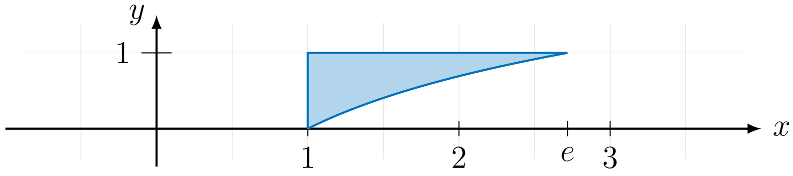
$$I = \int_1^e \int_{\ln(x)}^1 xe^y \, dy \, dx.$$

i) Berechnen Sie I. Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Lösung: $I = \dfrac{e^3}{6} - \dfrac{e}{2} + \dfrac{1}{3}$

ii) Skizzieren Sie den I zugrundeliegenden Normalbereich.

Lösung:



iii) Geben Sie I mit vertauschter Integrationsreihenfolge an.

Lösung: $I = \displaystyle\int_0^1 \int_1^{e^y} xe^y \, dx \, dy$

b) Skizzieren Sie

$$U = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 \le 1,\ y \ge 0\right\}$$

und berechnen Sie mittels Polarkoordinaten das Integral

$$\iint_U \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, dx \, dy.$$

Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Lösung: $\displaystyle\int_0^1 \int_0^\pi \frac{r^2 \sin(\varphi)}{\sqrt{(r\cos(\varphi))^2 + (r\sin(\varphi))^2}} \, d\varphi \, dr = 1$

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort $+1$ Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr ☐ Falsch Für den Flächeninhalt $|U|$ eines Normalbereichs U gilt

$$|U| = \iint_U 1 \, dx \, dy.$$

☐ Wahr ■ Falsch Ist $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig, dann gilt

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx \, dy.$$