Klausur zu Höhere Mathematik II BNUW SoSe 2022

Gesamtzahl der Aufgaben: 6, Gesamtpunktzahl: 60, Bearbeitungszeit: 120 Minuten

1. (7.5 Punkte)

a) Geben Sie

$$z = (-1+2\mathrm{i})(2-3\mathrm{i}) - 4$$

in der kartesischen Form $z = a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

Lösung: $z = 7\mathrm{i}$.

b) Geben Sie die Lösungen von

$$z^3 = -\mathrm{i}$$

in kartesischer Form an. Sie können dazu die folgende Tabelle nutzen.

ϕ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin\phi$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\phi$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Lösung: $z_0 = \mathrm{i}$, $z_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\mathrm{i}}{2}$, $z_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\mathrm{i}}{2}$

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ■ Falsch — Ist $z_1 = 3 - 2\mathrm{i}$ Nullstelle eines Polynoms mit reellen Koeffizienten, dann ist auch $z_2 = -3 - 2\mathrm{i}$ Nullstelle dieses Polynoms.

■ Wahr ☐ Falsch — Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt $|z - w| = |w - z|$.

2. (12 Punkte)

a) Bestimmen Sie durch den Gauß-Algorithmus die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ mit

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -2 & 8 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 13 \\ 11 \\ 26 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie Rang($\boldsymbol{A}$) und Rang($\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}$) an.

Lösung: $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\text{Rang}(\boldsymbol{A}) = \text{Rang}(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}) = 3$

b) Bestimmen Sie durch den Gauß-Algorithmus die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ mit

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 8 & 5 \\ -1 & 6 & -2 & -10 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie Rang($\boldsymbol{A}$) und Rang($\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}$) an.

Lösung: $\boldsymbol{x} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -12 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$

$\text{Rang}(\boldsymbol{A}) = \text{Rang}(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}) = 3$

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* +1 *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* −1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr ☐ Falsch Ein lineares Gleichungssystem mit zwei verschiedenen Lösungen hat sogar unendlich viele Lösungen.

■ Wahr ☐ Falsch Ein lineares Gleichungssystem $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ ist genau dann lösbar, wenn sich $\boldsymbol{b}$ als Linearkombination der Spalten von $\boldsymbol{A}$ schreiben lässt.

3. (11 Punkte)

a) Berechnen Sie die Eigenwerte von $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Lösung: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \frac{3}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\lambda_3 = \frac{3}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) Berechnen Sie alle Eigenvektoren von $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert $\lambda = -1$.

Lösung: $\boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $t \neq 0$

c) Gegeben sind invertierbare Matrizen $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Lösen Sie die Matrixgleichung

$$\boldsymbol{AXB} = \boldsymbol{AXC} + \boldsymbol{D}$$

nach $\boldsymbol{X}$ auf.

Lösung: $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{C})^{-1}$

d) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort −1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr ☐ Falsch Eine quadratische Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn für ihre Determinante $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$ gilt.

■ Wahr ☐ Falsch Sind $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, dann gilt für das Produkt $\boldsymbol{AB} \in \mathbb{R}^{m\times m}$.

4. (16 Punkte)

a) Gegeben sind $\boldsymbol{f}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ und $\boldsymbol{g}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\boldsymbol{f}(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ x_2-x_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{g}(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ x_1x_2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie falls möglich die Verfahrensvorschriften der Verkettung $\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f}$. Geben Sie eine Begründung an, falls diese nicht existiert.

Lösung: $(\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f})(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} -x_2+x_3 \\ x_1+x_2 \\ (x_1+x_2)(x_2-x_3) \end{pmatrix}.$

b) Berechnen Sie für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x_1,x_2) = \frac{x_1x_2}{1+x_1^2}$$

im Punkt $\boldsymbol{x}_0 = (2,5)$ die Richtungsableitung in Richtung $\boldsymbol{e} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,-1)^T$.

Lösung: $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}(\boldsymbol{x}_0) = \dfrac{1}{5\sqrt{2}}$

c) Berechnen Sie für

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x_1,x_2) = x_1^3 + x_1^2 + x_2^2 + x_2$$

alle stationären Punkte.

Lösung: Die einzigen stationären Punkte sind $\boldsymbol{x}_1 = \left(0,-\frac{1}{2}\right)$ und $\boldsymbol{x}_2 = \left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{2}\right)$.

d) Die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x_1,x_2) = \sin(x_1)(1-x_2^2)$$

hat den Gradienten

$$\operatorname{grad} f(x_1,x_2) = \big((1-x_2^2)\cos(x_1),\ -2x_2\sin(x_1)\big)^T$$

und den stationären Punkt

$$\boldsymbol{x}_1 = \left(-\tfrac{\pi}{2},0\right).$$

Entscheiden Sie, ob es sich bei $\boldsymbol{x}_1$ um eine Maximal- oder Minimalstelle bzw. um einen Sattelpunkt handelt.

Lösung: $\boldsymbol{x}_1$ ist Minimalstelle.

e) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr ☐ Falsch Die Menge $M \subset \mathbb{R}^2$ mit $M = (1,2) \times (3,4)$ ist offen.

☐ Wahr ■ Falsch Jede partiell differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist auch total differenzierbar.

5. (7 Punkte)

a) Berechnen Sie

$$\int_0^1 \int_0^{1-y} (x+y)\,dx\,dy.$$

Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Lösung: $\int_0^1 \int_0^{1-y} (x+y)\,dx\,dy = \frac{1}{3}$

b) Berechnen Sie die Fläche $|U|$ des Normalbereichs

$$U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi,\ \sin(x) \leq y \leq 1\right\}.$$

Lösung: $|U| = \frac{\pi}{2} - 1$

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort −1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr ☐ Falsch Für jede stetige Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dy\,dx.$$

☐ Wahr ■ Falsch Für jede stetige Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b \int_{x_0(y)}^{x_1(y)} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x_0(y)}^{x_1(y)} \int_a^b f(x,y)\,dy\,dx.$$

6. (6.5 Punkte)

a) Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y' = \frac{2}{x} \cdot y + x, \quad x > 0.$$

i) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

ii) Berechnen Sie die Lösung zum Anfangwert $y(1) = 2$.

Lösung:

i) $y(x) = x^2 \ln(x) + Cx^2$, $C \in \mathbb{R}$

ii) $y(x) = x^2(2 + \ln(x))$

b) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung

$$y'' - 4y' + 13y = 0.$$

Lösung: $y(x) = c_1 e^{2x} \cos(3x) + c_2 e^{2x} \sin(3x)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$