

Nachname:

Vorname:

Matrikelnummer:

Klausur zu
Höhere Mathematik II
Maschinenbau
SoSe 2022

Gesamtzahl der Aufgaben: 5, Gesamtpunktzahl: 60, Bearbeitungszeit: 120 Minuten

1. (7.5 Punkte)

a) Geben Sie

$$z = (-1 + 2i)(2 - 3i) - 4$$

in der kartesischen Form $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

b) Geben Sie die Lösungen von

$$z^3 = -i$$

in kartesischer Form an. Sie können dazu die folgende Tabelle nutzen.

ϕ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin \phi$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos \phi$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

c) Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☐ Falsch Ist $z_1 = 3 - 2i$ Nullstelle eines Polynoms mit reellen Koeffizienten, dann ist auch $z_2 = -3 - 2i$ Nullstelle dieses Polynoms.

☐ Wahr ☐ Falsch Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt $|z - w| = |w - z|$.

2. (12 Punkte)

a) Bestimmen Sie durch den Gauß-Algorithmus die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -2 & 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 13 \\ 11 \\ 26 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie $\text{Rang}(\mathbf{A})$ und $\text{Rang}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ an.

- b) Bestimmen Sie durch den Gauß-Algorithmus die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 8 & 5 \\ -1 & 6 & -2 & -10 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie $\text{Rang}(\mathbf{A})$ und $\text{Rang}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ an.

- c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☐ Falsch Ein lineares Gleichungssystem mit zwei verschiedenen Lösungen hat sogar unendlich viele Lösungen.

☐ Wahr ☐ Falsch Ein lineares Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ist genau dann lösbar, wenn sich $\mathbf{b}$ als Linearkombination der Spalten von $\mathbf{A}$ schreiben lässt.

3. (11 Punkte)

- a) Berechnen Sie die Eigenwerte von $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

- b) Berechnen Sie alle Eigenvektoren von $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert $\lambda = -1$.

- c) Gegeben sind invertierbare Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Lösen Sie die Matrixgleichung

$$\mathbf{AXB} = \mathbf{AXC} + \mathbf{D}$$

nach $\mathbf{X}$ auf.

- d) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☐ Falsch Eine quadratische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn für ihre Determinante $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ gilt.

☐ Wahr ☐ Falsch Sind $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, dann gilt für das Produkt $\mathbf{AB} \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

4. (16 Punkte)

a) Gegeben sind $\mathbf{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ und $\mathbf{g}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie falls möglich die Verfahrensvorschriften der Verkettung $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$. Geben Sie eine Begründung an, falls diese nicht existiert.

b) Berechnen Sie für die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2}{1 + x_1^2}$$

im Punkt $\mathbf{x}_0 = (2, 5)$ die Richtungsableitung in Richtung $\mathbf{e} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, -1)^T$.

c) Berechnen Sie für

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_1^2 + x_2^2 + x_2$$

alle stationären Punkte.

d) Die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = \sin(x_1)(1 - x_2^2)$$

hat den Gradienten

$$\text{grad } f(x_1, x_2) = ((1 - x_2^2) \cos(x_1), -2x_2 \sin(x_1))^T$$

und den stationären Punkt

$$\mathbf{x}_1 = \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right).$$

Entscheiden Sie, ob es sich bei $\mathbf{x}_1$ um eine Maximal- oder Minimalstelle bzw. um einen Sattelpunkt handelt.

e) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☐ Falsch Die Menge $M \subset \mathbb{R}^2$ mit $M = (1, 2) \times (3, 4)$ ist offen.

☐ Wahr ☐ Falsch Jede partiell differenzierbare Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist auch total differenzierbar.

5. (13.5 Punkte)

a) Berechnen Sie

$$\int_0^1 \int_0^{1-y} (x + y) \, dx \, dy.$$

Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

b) Berechnen Sie die Fläche $|U|$ des Normalbereichs

$$U = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, \sin(x) \leq y \leq 1 \right\}.$$

c) Zu einer stetigen Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ betrachten wir das Integral

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{2x}}^{\sqrt{2}} f(x, y) dy dx.$$

Bestimmen Sie die Integrationsgrenzen nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge, d. h. finden Sie a , b , $x_0(y)$ und $x_1(y)$, sodass

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{2x}}^{\sqrt{2}} f(x, y) dy dx = \int_a^b \int_{x_0(y)}^{x_1(y)} f(x, y) dx dy.$$

gilt.

d) Berechnen Sie mittels Polarkoordinaten das Integral

$$\iint_U x(x^2 + y^2) dx dy$$

über dem Halbkreis

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0\}.$$

Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

e) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☐ Falsch Für jede stetige Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dy dx.$$

☐ Wahr ☐ Falsch Für jede stetige Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b \int_{x_0(y)}^{x_1(y)} f(x, y) dx dy = \int_{x_0(y)}^{x_1(y)} \int_a^b f(x, y) dy dx.$$