

Klausur zu
Höhere Mathematik II
Maschinenbau
SoSe 2022

Gesamtzahl der Aufgaben: 5, Gesamtpunktzahl: 60, Bearbeitungszeit: 120 Minuten

1. (7.5 Punkte)

a) Geben Sie

$$z = (-1 + 2i)(2 - 3i) - 4$$

in der kartesischen Form $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

Lösung: $z = 7i$.

b) Geben Sie die Lösungen von

$$z^3 = -i$$

in kartesischer Form an. Sie können dazu die folgende Tabelle nutzen.

ϕ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin \phi$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos \phi$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Lösung: $z_0 = i, z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}, z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$

c) Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Wahr Falsch Ist $z_1 = 3 - 2i$ Nullstelle eines Polynoms mit reellen Koeffizienten, dann ist auch $z_2 = -3 - 2i$ Nullstelle dieses Polynoms.

Wahr Falsch Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt $|z - w| = |w - z|$.

2. (12 Punkte)

- a) Bestimmen Sie durch den Gauß-Algorithmus die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -2 & 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 13 \\ 11 \\ 26 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie $\text{Rang}(\mathbf{A})$ und $\text{Rang}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ an.

Lösung: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\text{Rang}(\mathbf{A}) = \text{Rang}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = 3$

- b) Bestimmen Sie durch den Gauß-Algorithmus die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 8 & 5 \\ -1 & 6 & -2 & -10 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie $\text{Rang}(\mathbf{A})$ und $\text{Rang}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ an.

Lösung: $\mathbf{x} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -12 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$

$\text{Rang}(\mathbf{A}) = \text{Rang}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = 3$

- c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Wahr Falsch Ein lineares Gleichungssystem mit zwei verschiedenen Lösungen hat sogar unendlich viele Lösungen.

Wahr Falsch Ein lineares Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ist genau dann lösbar, wenn sich \mathbf{b} als Linearkombination der Spalten von \mathbf{A} schreiben lässt.

3. (11 Punkte)

- a) Berechnen Sie die Eigenwerte von $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Lösung: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \lambda_3 = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

- b) Berechnen Sie alle Eigenvektoren von $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert $\lambda = -1$.

Lösung: $\mathbf{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, t \neq 0$

- c) Gegeben sind invertierbare Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Lösen Sie die Matrixgleichung

$$\mathbf{AXB} = \mathbf{AXC} + \mathbf{D}$$

nach \mathbf{X} auf.

Lösung: $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{D}(\mathbf{B} - \mathbf{C})^{-1}$

- d) Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr □ Falsch Eine quadratische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn für ihre Determinante $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ gilt.

■ Wahr □ Falsch Sind $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, dann gilt für das Produkt $\mathbf{AB} \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

4. (16 Punkte)

a) Gegeben sind $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ und $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix}, \quad g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie falls möglich die Verfahrensvorschriften der Verkettung $g \circ f$. Geben Sie eine Begründung an, falls diese nicht existiert.

$$\text{Lösung: } (g \circ f)(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 \\ (x_1 + x_2)(x_2 - x_3) \end{pmatrix}.$$

b) Berechnen Sie für die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2}{1 + x_1^2}$$

im Punkt $\mathbf{x}_0 = (2, 5)$ die Richtungsableitung in Richtung $\mathbf{e} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, -1)^T$.

$$\text{Lösung: } \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}}(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{5\sqrt{2}}$$

c) Berechnen Sie für

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_1^2 + x_2^2 + x_2$$

alle stationären Punkte.

$$\text{Lösung: Die einzigen stationären Punkte sind } \mathbf{x}_1 = (0, -\frac{1}{2}) \text{ und } \mathbf{x}_2 = (-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}).$$

d) Die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = \sin(x_1)(1 - x_2^2)$$

hat den Gradienten

$$\text{grad } f(x_1, x_2) = ((1 - x_2^2) \cos(x_1), -2x_2 \sin(x_1))^T$$

und den stationären Punkt

$$\mathbf{x}_1 = (-\frac{\pi}{2}, 0).$$

Entscheiden Sie, ob es sich bei \mathbf{x}_1 um eine Maximal- oder Minimalstelle bzw. um einen Sattelpunkt handelt.

$$\text{Lösung: } \mathbf{x}_1 \text{ ist Minimalstelle.}$$

e) Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

- Wahr Falsch Die Menge $M \subset \mathbb{R}^2$ mit $M = (1, 2) \times (3, 4)$ ist offen.
- Wahr Falsch Jede partiell differenzierbare Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist auch total differenzierbar.

5. (13.5 Punkte)

a) Berechnen Sie

$$\int_0^1 \int_0^{1-y} (x+y) dx dy.$$

Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Lösung: $\int_0^1 \int_0^{1-y} (x+y) dx dy = \frac{1}{3}$

b) Berechnen Sie die Fläche $|U|$ des Normalbereichs

$$U = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, \sin(x) \leq y \leq 1 \right\}.$$

Lösung: $|U| = \frac{\pi}{2} - 1$

c) Zu einer stetigen Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ betrachten wir das Integral

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{2x}}^{\sqrt{2}} f(x, y) dy dx.$$

Bestimmen Sie die Integrationsgrenzen nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge, d. h. finden Sie $a, b, x_0(y)$ und $x_1(y)$, sodass

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{2x}}^{\sqrt{2}} f(x, y) dy dx = \int_a^b \int_{x_0(y)}^{x_1(y)} f(x, y) dx dy.$$

gilt.

Lösung: $a = 0, b = \sqrt{2}, x_0(y) = 0, x_1(y) = \frac{1}{2}y^2$

d) Berechnen Sie mittels Polarkoordinaten das Integral

$$\iint_U x(x^2 + y^2) dx dy$$

über dem Halbkreis

$$U = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0 \right\}.$$

Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Lösung: $\int_0^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} r \cos(\varphi) \left((r \cos(\varphi))^2 + (r \sin(\varphi))^2 \right) r d\varphi dr = -\frac{64}{5}$

- e) Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Wahr Falsch Für jede stetige Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dy dx.$$

Wahr Falsch Für jede stetige Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b \int_{x_0(y)}^{x_1(y)} f(x, y) dx dy = \int_{x_0(y)}^{x_1(y)} \int_a^b f(x, y) dy dx.$$