Klausur zu Höhere Mathematik II BNUW SoSe 2023

Gesamtzahl der Aufgaben: 6, Gesamtpunktzahl: 70, Bearbeitungszeit: 120 Minuten

1. (8.5 Punkte)

a) Gegeben sind die komplexen Zahlen

$$z_1 = 2e^{\frac{1}{3}\pi\mathrm{i}}, \quad z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}.$$

i) Geben Sie z_1 in kartesischer Form an. Vereinfachen Sie dabei so weit wie möglich.

ii) Geben Sie z_2 in Polarform an.

Sie können dabei die folgende Tabelle nutzen.

ϕ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin(\phi)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos(\phi)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Lösung:

i) $z_1 = 1 + \sqrt{3}\mathrm{i}$

ii) $z_2 = e^{\frac{11\pi\mathrm{i}}{6}}$

b) Bestimmen Sie die Linearfaktorzerlegung von

$$f(z) = 2z^3 - z^2 + 8z - 4.$$

Hinweis: $z_0 = 2\mathrm{i}$ ist eine Nullstelle von f.

Lösung: $f(z) = 2(z - 2\mathrm{i})(z + 2\mathrm{i})(z - \frac{1}{2})$

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort $+1$ Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ■ Falsch Für $z = 1 + 2\mathrm{i}$ gilt $\mathrm{Im}(z) = 2\mathrm{i}$

■ Wahr ☐ Falsch Es gilt $\left\{z \in \mathbb{C} \mid z = re^{\frac{\pi\mathrm{i}}{2}},\ r \in [0,1]\right\} = \left\{z \in \mathbb{C} \mid z = \mathrm{i}y,\ y \in [0,1]\right\}$.

2. (12.5 Punkte)

a) Bestimmen Sie durch den Gauß-Algorithmus die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

> **Lösung:** $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) Gegeben ist die Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & -6 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

i) Entscheiden Sie, ob die Spalten von $\boldsymbol{A}$ linear unabhängig sind. Falls die Spaltenvektoren linear abhängig sind, stellen Sie einen Spaltenvektor als Linearkombination der anderen Spaltenvektoren dar.

> **Lösung:** Die Vektoren sind linear abhängig und es gilt
>
> $$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ii) Geben Sie den Rang von $\boldsymbol{A}$ an.

> **Lösung:** $\text{Rang}(\boldsymbol{A}) = 2$

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr ☐ Falsch — Hat ein lineares Gleichungssystem $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ zwei verschiedene Lösungen, dann hat das lineare Gleichungssystem sogar unendlich viele Lösungen.

☐ Wahr ■ Falsch — Gilt $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ mit $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, dann ist $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ oder $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$.

3. (16.5 Punkte)

a) Gegeben sind invertierbare Matrizen $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Lösen Sie die Matrixgleichung

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = 2\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{C} + \boldsymbol{A}$$

nach $\boldsymbol{X}$ auf. Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Lösung: $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})^{-1}$

b) Berechnen Sie die Inverse $\boldsymbol{A}^{-1}$ von

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Lösung: $\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

c) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & -2 \\ -21 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lösung: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -\frac{3}{2} - \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2},\ \lambda_3 = -\frac{3}{2} + \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$

d) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort $+1$ Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr	☐ Falsch	Eine Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ hat genau dann linear unabhängige Spalten, wenn $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$ ist.
■ Wahr	☐ Falsch	Eine Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn $\boldsymbol{A}$ regulär ist.
☐ Wahr	■ Falsch	Der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ einer Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist die Menge aller Eigenvektoren von $\boldsymbol{A}$ zum Eigenwert λ.

4. (18.5 Punkte)

a) Berechnen Sie, falls möglich, die Verkettungen $f \circ \boldsymbol{g}$ und $\boldsymbol{g} \circ f$ und die zugehörigen Funktionalmatrizen für

$$f\colon (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x_1,x_2) = \ln(x_1^2 x_2)$$
$$\boldsymbol{g}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{g}(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} e^{x_2} \\ e^{x_1} \end{pmatrix}.$$

Vereinfachen Sie die Ausdrücke soweit wie möglich. Geben Sie eine Begründung an, falls eine Verkettung nicht existiert.

Lösung: $(f \circ \boldsymbol{g}) = x_1 + 2x_2$, $(f \circ \boldsymbol{g})' = (1,2)$. Die Verkettung $\boldsymbol{g} \circ f$ existiert nicht, da f nach $\mathbb{R}$ abbildet, aber $\boldsymbol{g}$ auf $\mathbb{R}^2$ definiert ist.

b) Berechnen Sie für die Funktion

$$f\colon [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x_1,x_2) = x_2^2\sqrt{x_1}$$

die maximale Steigung in $\boldsymbol{x}_0 = (2,2)$.

Lösung: $\|\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}_0)\| = \sqrt{34}$

c) Bestimmen Sie alle stationären Stellen der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x_1,x_2,x_3) = -(x_1-1)^2 - x_2^2 - (x_3+1)^2.$$

Lösung: Einzige stationäre Stelle ist $\boldsymbol{x} = (1,0,-1)$.

d) Die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x_1,x_2) = \sin(2\pi x_1)\cos(3\pi x_2)$$

hat den Gradienten

$$\operatorname{grad} f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 2\pi\cos(2\pi x_1)\cos(3\pi x_2) \\ -3\pi\sin(2\pi x_1)\sin(3\pi x_2) \end{pmatrix}$$

und $\boldsymbol{x}_0 = \left(-\frac{1}{4}, 0\right)$ als stationäre Stelle. Bestimmen Sie, ob es sich bei $\boldsymbol{x}_0$ um eine Maximal-, Minimal- oder Sattelstelle handelt.

Lösung: $\boldsymbol{x}_0$ ist eine Minimalstelle.

e) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort −1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr ☐ Falsch Eine offene Menge enthält keinen ihrer Randpunkte.

☐ Wahr ■ Falsch Wenn eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in $\boldsymbol{x}_0$ partiell differenzierbar ist, dann ist f in $\boldsymbol{x}_0$ auch differenzierbar.

5. (8 Punkte)

   a) Berechnen Sie das Integral
$$\int_1^2 \int_0^{\ln(y)} 6e^x y \, dx \, dy.$$
   Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

   Lösung: $\displaystyle\int_1^2 \int_0^{\ln(y)} 6e^x y \, dx \, dy = 5$

   b) Berechnen Sie die Fläche des Normalbereichs U der von der x-Achse, der y-Achse, der Geraden $x = \pi$ und dem Graphen der Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x) + 1$ begrenzt wird.

   Lösung: $\displaystyle\int_0^{\pi} \int_0^{\cos(x)+1} 1 \, dy \, dx = \pi$

   c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

   Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

   ■ Wahr ☐ Falsch Bei Integration einer stetigen Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ über ein Rechteck $[a,b] \times [c,d]$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gilt stets
$$\int_a^b \int_c^d f(x,y) \, dx \, dy = \int_c^d \int_a^b f(x,y) \, dy \, dx.$$

   ■ Wahr ☐ Falsch Ist U die obere Hälfte der Kreisscheibe um $(0,0)$ mit Radius 2, dann lässt sich das Integral $\iint_U f(x,y) \, dx \, dy$ durch Polarkoordinaten in der Form
$$\int_0^2 \int_0^{\pi} f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) r \, d\varphi \, dr$$
   schreiben.

6. (6 Punkte)

a) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \frac{e^x}{2y}, \quad y(0) = 2.$$

durch Trennen der Variablen.

Lösung: $y(x) = \sqrt{e^x + 3}$

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der skalaren linearen Differentialgleichung

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

Lösung: $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$