Nachname:

Vorname:

Matrikelnummer:

Klausur zu
Höhere Mathematik II
BNUW
SoSe 2023

Gesamtzahl der Aufgaben: 6, Gesamtpunktzahl: 70, Bearbeitungszeit: 120 Minuten

1. (8.5 Punkte)

a) Gegeben sind die komplexen Zahlen

$$z_1 = 2e^{\frac{1}{3}\pi i}, \quad z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}.$$

i) Geben Sie z_1 in kartesischer Form an. Vereinfachen Sie dabei so weit wie möglich.

ii) Geben Sie z_2 in Polarform an.

Sie können dabei die folgende Tabelle nutzen.

ϕ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin(\phi)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos(\phi)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

b) Bestimmen Sie die Linearfaktorzerlegung von

$$f(z) = 2z^3 - z^2 + 8z - 4.$$

Hinweis: $z_0 = 2i$ ist eine Nullstelle von f .

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Wahr Falsch Für $z = 1 + 2i$ gilt $\text{Im}(z) = 2i$

Wahr Falsch Es gilt $\{z \in \mathbb{C} \mid z = re^{\frac{\pi i}{2}}, r \in [0, 1]\} = \{z \in \mathbb{C} \mid z = iy, y \in [0, 1]\}$.

2. (12.5 Punkte)

a) Bestimmen Sie durch den Gauß-Algorithmus die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

b) Gegeben ist die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -6 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

i) Entscheiden Sie, ob die Spalten von $\mathbf{A}$ linear unabhängig sind. Falls die Spaltenvektoren linear abhängig sind, stellen Sie einen Spaltenvektor als Linearkombination der anderen Spaltenvektoren dar.

ii) Geben Sie den Rang von $\mathbf{A}$ an.

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Wahr Falsch Hat ein lineares Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ zwei verschiedene Lösungen, dann hat das lineare Gleichungssystem sogar unendlich viele Lösungen.

Wahr Falsch Gilt $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ mit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dann ist $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ oder $\mathbf{A} = \mathbf{0}$.

3. (16.5 Punkte)

a) Gegeben sind invertierbare Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Lösen Sie die Matrixgleichung

$$\mathbf{A}\mathbf{X}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = 2\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{C} + \mathbf{A}$$

nach $\mathbf{X}$ auf. Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

b) Berechnen Sie die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$ von

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

c) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & -2 \\ -21 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

d) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Wahr Falsch Eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ hat genau dann linear unabhängige Spalten, wenn $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ ist.

- Wahr Falsch Eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn $\mathbf{A}$ regulär ist.
- Wahr Falsch Der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist die Menge aller Eigenvektoren von $\mathbf{A}$ zum Eigenwert λ .

4. (18.5 Punkte)

- a) Berechnen Sie, falls möglich, die Verkettungen $f \circ g$ und $g \circ f$ und die zugehörigen Funktionalmatrizen für

$$f: (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = \ln(x_1^2 x_2)$$

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} e^{x_2} \\ e^{x_1} \end{pmatrix}.$$

Vereinfachen Sie die Ausdrücke soweit wie möglich. Geben Sie eine Begründung an, falls eine Verkettung nicht existiert.

- b) Berechnen Sie für die Funktion

$$f: [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = x_2^2 \sqrt{x_1}$$

die maximale Steigung in $\mathbf{x}_0 = (2, 2)$.

- c) Bestimmen Sie alle stationären Stellen der Funktion

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2, x_3) = -(x_1 - 1)^2 - x_2^2 - (x_3 + 1)^2.$$

- d) Die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = \sin(2\pi x_1) \cos(3\pi x_2)$$

hat den Gradienten

$$\text{grad } f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2\pi \cos(2\pi x_1) \cos(3\pi x_2) \\ -3\pi \sin(2\pi x_1) \sin(3\pi x_2) \end{pmatrix}$$

und $\mathbf{x}_0 = (-\frac{1}{4}, 0)$ als stationäre Stelle. Bestimmen Sie, ob es sich bei $\mathbf{x}_0$ um eine Maximal-, Minimal- oder Sattelstelle handelt.

- e) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

- Wahr Falsch Eine offene Menge enthält keinen ihrer Randpunkte.
- Wahr Falsch Wenn eine Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ in $\mathbf{x}_0$ partiell differenzierbar ist, dann ist f in $\mathbf{x}_0$ auch differenzierbar.

5. (8 Punkte)

- a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_1^2 \int_0^{\ln(y)} 6e^x y \, dx \, dy.$$

Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

- b) Berechnen Sie die Fläche des Normalbereichs U der von der x -Achse, der y -Achse, der Geraden $x = \pi$ und dem Graphen der Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x) + 1$ begrenzt wird.
- c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

- Wahr Falsch Bei Integration einer stetigen Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ über ein Rechteck $[a, b] \times [c, d]$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gilt stets

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dy dx.$$

- Wahr Falsch Ist U die obere Hälfte der Kreisscheibe um $(0, 0)$ mit Radius 2, dann lässt sich das Integral $\iint_U f(x, y) dx dy$ durch Polarkoordinaten in der Form

$$\int_0^2 \int_0^\pi f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) r d\varphi dr$$

schreiben.

6. (6 Punkte)

- a) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \frac{e^x}{2y}, \quad y(0) = 2.$$

durch Trennen der Variablen.

- b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der skalaren linearen Differentialgleichung

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$