

**Klausur zu
Höhere Mathematik II
Maschinenbau
SoSe 2023**

Gesamtzahl der Aufgaben: 5, Gesamtpunktzahl: 70, Bearbeitungszeit: 120 Minuten

1. (8.5 Punkte)

a) Gegeben sind die komplexen Zahlen

$$z_1 = 2e^{\frac{1}{3}\pi i}, \quad z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}.$$

i) Geben Sie z_1 in kartesischer Form an. Vereinfachen Sie dabei so weit wie möglich.

ii) Geben Sie z_2 in Polarform an.

Sie können dabei die folgende Tabelle nutzen.

ϕ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin(\phi)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos(\phi)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Lösung:

i) $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$

ii) $z_2 = e^{\frac{11\pi i}{6}}$

b) Bestimmen Sie die Linearfaktorzerlegung von

$$f(z) = 2z^3 - z^2 + 8z - 4.$$

Hinweis: $z_0 = 2i$ ist eine Nullstelle von f .

Lösung: $f(z) = 2(z - 2i)(z + 2i)(z - \frac{1}{2})$

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Wahr Falsch Für $z = 1 + 2i$ gilt $\text{Im}(z) = 2i$

Wahr Falsch Es gilt $\{z \in \mathbb{C} \mid z = re^{\frac{\pi i}{2}}, r \in [0, 1]\} = \{z \in \mathbb{C} \mid z = iy, y \in [0, 1]\}$.

2. (12.5 Punkte)

- a) Bestimmen Sie durch den Gauß-Algorithmus die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Lösung: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

- b) Gegeben ist die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -6 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

- i) Entscheiden Sie, ob die Spalten von \mathbf{A} linear unabhängig sind. Falls die Spaltenvektoren linear abhängig sind, stellen Sie einen Spaltenvektor als Linearkombination der anderen Spaltenvektoren dar.

Lösung: Die Vektoren sind linear abhängig und es gilt

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- ii) Geben Sie den Rang von \mathbf{A} an.

Lösung: $\text{Rang}(\mathbf{A}) = 2$

- c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Wahr Falsch Hat ein lineares Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ zwei verschiedene Lösungen, dann hat das lineare Gleichungssystem sogar unendlich viele Lösungen.

Wahr Falsch Gilt $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ mit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dann ist $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ oder $\mathbf{A} = \mathbf{0}$.

3. (16.5 Punkte)

a) Gegeben sind invertierbare Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Lösen Sie die Matrixgleichung

$$\mathbf{AX}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = 2\mathbf{AXC} + \mathbf{A}$$

nach \mathbf{X} auf. Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Lösung: $\mathbf{X} = (\mathbf{B} - \mathbf{C})^{-1}$

b) Berechnen Sie die Inverse \mathbf{A}^{-1} von

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Lösung: $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

c) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & -2 \\ -21 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lösung: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -\frac{3}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}, \lambda_3 = -\frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

d) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Wahr Falsch Eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ hat genau dann linear unabhängige Spalten, wenn $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ ist.

Wahr Falsch Eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn \mathbf{A} regulär ist.

Wahr Falsch Der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist die Menge aller Eigenvektoren von \mathbf{A} zum Eigenwert λ .

4. (18.5 Punkte)

- a) Berechnen Sie, falls möglich, die Verkettungen $f \circ g$ und $g \circ f$ und die zugehörigen Funktionalmatrizen für

$$f: (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = \ln(x_1^2 x_2)$$

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} e^{x_2} \\ e^{x_1} \end{pmatrix}.$$

Vereinfachen Sie die Ausdrücke soweit wie möglich. Geben Sie eine Begründung an, falls eine Verkettung nicht existiert.

Lösung: $(f \circ g) = x_1 + 2x_2$, $(f \circ g)' = (1, 2)$. Die Verkettung $g \circ f$ existiert nicht, da f nach \mathbb{R} abbildet, aber g auf \mathbb{R}^2 definiert ist.

- b) Berechnen Sie für die Funktion

$$f: [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = x_2^2 \sqrt{x_1}$$

die maximale Steigung in $\mathbf{x}_0 = (2, 2)$.

Lösung: $\|\text{grad } f(\mathbf{x}_0)\| = \sqrt{34}$

- c) Bestimmen Sie alle stationären Stellen der Funktion

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2, x_3) = -(x_1 - 1)^2 - x_2^2 - (x_3 + 1)^2.$$

Lösung: Einzige stationäre Stelle ist $\mathbf{x} = (1, 0, -1)$.

- d) Die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = \sin(2\pi x_1) \cos(3\pi x_2)$$

hat den Gradienten

$$\text{grad } f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2\pi \cos(2\pi x_1) \cos(3\pi x_2) \\ -3\pi \sin(2\pi x_1) \sin(3\pi x_2) \end{pmatrix}$$

und $\mathbf{x}_0 = (-\frac{1}{4}, 0)$ als stationäre Stelle. Bestimmen Sie, ob es sich bei \mathbf{x}_0 um eine Maximal-, Minimal- oder Sattelstelle handelt.

Lösung: \mathbf{x}_0 ist eine Minimalstelle.

- e) Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Wahr Falsch Eine offene Menge enthält keinen ihrer Randpunkte.

Wahr Falsch Wenn eine Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ in \mathbf{x}_0 partiell differenzierbar ist, dann ist f in \mathbf{x}_0 auch differenzierbar.

5. (14 Punkte)

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_1^2 \int_0^{\ln(y)} 6e^x y \, dx \, dy.$$

Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Lösung: $\int_1^2 \int_0^{\ln(y)} 6e^x y \, dx \, dy = 5$

b) Berechnen Sie die Fläche des Normalbereichs U der von der x -Achse, der y -Achse, der Geraden $x = \pi$ und dem Graphen der Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x) + 1$ begrenzt wird.

Lösung: $\int_0^\pi \int_0^{\cos(x)+1} 1 \, dy \, dx = \pi$

c) Berechnen Sie über dem Dreieck mit Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 1)$ und $(1, -1)$ den Oberflächeninhalt $|S|$ des Graphen der Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = 1 - 2x - 3y$.

Lösung: $|S| = \int_0^1 \int_{-x}^x \sqrt{1 + (-2)^2 + (-3)^2} \, dy \, dx = \sqrt{14}$.

d) Geben Sie das Integral zur Berechnung des Volumeninhalts der oberen Hälfte der Kugel mit Radius 2 um den Ursprung in Kugelkoordinaten an.

Hinweis: Das Integral soll nicht berechnet werden!

Lösung: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^2 \sin(\theta) \, dr \, d\varphi \, d\theta$

e) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr □ Falsch Bei Integration einer stetigen Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ über ein Rechteck $[a, b] \times [c, d]$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gilt stets

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dy \, dx.$$

■ Wahr □ Falsch Ist U die obere Hälfte der Kreisscheibe um $(0, 0)$ mit Radius 2, dann lässt sich das Integral $\iint_U f(x, y) \, dx \, dy$ durch Polarkoordinaten in der Form

$$\int_0^2 \int_0^\pi f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) r \, d\varphi \, dr$$

schreiben.