Nachname:

Vorname:

Matrikelnummer:

Klausur zu Höhere Mathematik II BNUW WiSe 2022/2023

Gesamtzahl der Aufgaben: 6, Gesamtpunktzahl: 70, Bearbeitungszeit: 120 Minuten

1. (9.5 Punkte)

   a) Bestimmen Sie den Imaginärteil von
   $$z = \frac{1-2\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}.$$

   b) Bestimmen Sie die Linearfaktorzerlegung von
   $$f(z) = z^3 + 8z^2 + 16z + 24.$$
   Hinweis: $z_0 = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ ist eine Nullstelle von f.

   c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

   Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

   ☐ Wahr ☐ Falsch $z = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi\cdot 5}{6}}$ ist eine Lösung von $z^5 = 1$.

   ☐ Wahr ☐ Falsch Es gilt $2e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}} = -2\mathrm{i}$.

2. (11 Punkte)

   a) Bestimmen Sie durch den Gauß-Algorithmus die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit
   $$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -6 & -6 \\ 3 & 4 & 9 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$
   Geben Sie $\mathrm{Rang}(\boldsymbol{A})$ und $\mathrm{Rang}(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b})$ an.

   b) Bestimmen Sie durch den Gauß-Algorithmus die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit
   $$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}.$$
   Geben Sie $\mathrm{Rang}(\boldsymbol{A})$ und $\mathrm{Rang}(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b})$ an.

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☐ Falsch Es gibt lineare Gleichungssysteme $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ die genau drei Lösungen haben.

☐ Wahr ☐ Falsch Gilt $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$, dann ist $\boldsymbol{x}$ ein Element von $\text{Kern}(\boldsymbol{A})$.

3. (11 Punkte)

a) Gegeben sind die Matrizen

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, ob die folgenden Produkte gebildet werden können, und berechnen Sie diese gegebenenfalls.

i) $\boldsymbol{AB}$ ii) $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}$ iii) $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{B}$ iv) $\boldsymbol{CC}^T$

b) Gegeben sind invertierbare Matrizen $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Lösen Sie die Matrixgleichung

$$\boldsymbol{XA} = \boldsymbol{C} - \boldsymbol{XB}$$

nach $\boldsymbol{X}$ auf.

c) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \alpha & -2 & 0 \\ -2 & \alpha & -2 \\ 0 & -2 & \alpha \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit von α. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\boldsymbol{A}$ regulär?

d) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☐ Falsch Ist $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ ein Eigenvektor von $\boldsymbol{A}$, dann ist auch $\alpha\boldsymbol{x}$ für $\alpha \neq 0$ ein Eigenvektor von $\boldsymbol{A}$.

☐ Wahr ☐ Falsch Eine Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn die Spalten von $\boldsymbol{A}$ linear unabhängig sind.

☐ Wahr ☐ Falsch Der Eigenraum zu einem Eigenwert λ entspricht der Menge aller Eigenvektoren zum Eigenwert λ.

4. (19.5 Punkte)

   a) Gegeben sind $\boldsymbol{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $\boldsymbol{g}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit

   $$\boldsymbol{f}(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{g}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

   Bestimmen Sie die Ableitungsmatrix $(\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g})'$ unter Verwendung der mehrdimensionalen Kettenregel.

   Hinweis: Wenn Sie zuerst die Verkettung berechnen und diese ableiten, erhalten Sie keine Punkte!

   b) Berechnen Sie für die Funktion

   $$f\colon (0,\infty)\times(0,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x_1,x_2) = \ln(x_1 x_2)$$

   die maximale Steigung im Punkt $\boldsymbol{x}_0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$. Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

   c) Berechnen Sie die Tangentialebene an den Graphen von

   $$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x_1,x_2) = \sin(\pi x_1 x_2)$$

   in $\boldsymbol{x}_0 = (1,2)$.

   d) Berechnen Sie für

   $$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x_1,x_2) = 1 + x_2^2 - e^{x_1^2}$$

   die stationären Punkte. Entscheiden Sie jeweils, ob es sich um eine Maximal- oder Minimalstelle bzw. um einen Sattelpunkt handelt.

   e) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

   Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

   ☐ Wahr ☐ Falsch Die Menge $M \subset \mathbb{R}^2$ mit $M = [0,1]\times[-1,1]$ ist abgeschlossen.

   ☐ Wahr ☐ Falsch Die Höhenlinien der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1,x_2) = 2x_1 + 3x_2 + 5$ sind Kreise.

   ☐ Wahr ☐ Falsch Bei einer partiell differenzierbaren Funktion $\boldsymbol{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist die Ableitungsmatrix eine $m\times n$-Matrix.

5. (11 Punkte)

   a) Berechnen Sie das Integral

   $$\iint_U e^x + \cos(y)\,dx\,dy$$

   über dem Normalbereich

   $$U = \left\{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \le x \le \ln(2),\ \frac{\pi}{2} \le y \le \frac{3\pi}{2} \right\}.$$

b) Berechnen Sie mit Polarkoordinaten das Integral

$$\iint_U \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy,$$

wobei

$$U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2 \leq 4\right\}$$

ist.

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☐ Falsch Ein Normalbereich bezüglich x muss kein Normalbereich bezüglich y sein.

☐ Wahr ☐ Falsch Für den Flächeninhalt $|U|$ eines Normalbereichs U gilt

$$|U| = \iint_U 1\,dx\,dy.$$

6. (8 Punkte)

a) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = 2x^2e^{3y}, \quad y(0) = 1.$$

b) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'' - 2y' + y = 0, \quad y(0) = 1,\; y'(0) = 2.$$