

Klausur zu
Höhere Mathematik II
Maschinenbau
WiSe 2022/2023

Gesamtzahl der Aufgaben: 5, Gesamtpunktzahl: 70, Bearbeitungszeit: 120 Minuten

1. (9.5 Punkte)

a) Bestimmen Sie den Imaginärteil von

$$z = \frac{1 - 2i}{2 - i}.$$

Lösung: $\operatorname{Im}(z) = -\frac{3}{5}$

b) Bestimmen Sie die Linearfaktorzerlegung von

$$f(z) = z^3 + 8z^2 + 16z + 24.$$

Hinweis: $z_0 = -1 + i\sqrt{3}$ ist eine Nullstelle von f .

Lösung: $f(z) = (z - (-1 + i\sqrt{3}))(z - (-1 - i\sqrt{3}))(z + 6)$

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☒ Falsch $z = e^{i\frac{2\pi \cdot 5}{6}}$ ist eine Lösung von $z^5 = 1$.

☒ Wahr ☐ Falsch Es gilt $2e^{i\frac{3\pi}{2}} = -2i$.

2. (11 Punkte)

- a) Bestimmen Sie durch den Gauß-Algorithmus die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -6 & -6 \\ 3 & 4 & 9 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie $\text{Rang}(\mathbf{A})$ und $\text{Rang}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ an.

Lösung: $\mathbf{x} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$

$\text{Rang}(\mathbf{A}) = \text{Rang}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = 2.$

- b) Bestimmen Sie durch den Gauß-Algorithmus die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie $\text{Rang}(\mathbf{A})$ und $\text{Rang}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ an.

Lösung: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\text{Rang}(\mathbf{A}) = \text{Rang}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = 3$

- c) Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☒ Falsch Es gibt lineare Gleichungssysteme $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ die genau drei Lösungen haben.

☒ Wahr ☐ Falsch Gilt $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, dann ist $\mathbf{x}$ ein Element von $\text{Kern}(\mathbf{A})$.

3. (11 Punkte)

a) Gegeben sind die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, ob die folgenden Produkte gebildet werden können, und berechnen Sie diese gegebenenfalls.

i) $\mathbf{AB}$

ii) $\mathbf{C}^T \mathbf{A}$

iii) $\mathbf{C}^T \mathbf{B}$

iv) $\mathbf{CC}^T$

Lösung:

i) $\mathbf{AB}$ existiert nicht, denn $\mathbf{A}$ hat 2 Spalten und $\mathbf{B}$ hat 3 Zeilen.

ii) $\mathbf{C}^T \mathbf{A}$ existiert nicht, denn $\mathbf{C}^T$ hat 3 Spalten und $\mathbf{A}$ hat 2 Zeilen.

$$\text{iii) } \mathbf{C}^T \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{iv) } \mathbf{CC}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

b) Gegeben sind invertierbare Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Lösen Sie die Matrixgleichung

$$\mathbf{XA} = \mathbf{C} - \mathbf{XB}$$

nach $\mathbf{X}$ auf.

$$\text{Lösung: } \mathbf{X} = \mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}$$

c) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & -2 & 0 \\ -2 & \alpha & -2 \\ 0 & -2 & \alpha \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit von α . Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\mathbf{A}$ regulär?

$$\text{Lösung: } \det(\mathbf{A}) = \alpha(\alpha^2 - 8). \text{ Die Matrix } \mathbf{A} \text{ ist regulär für } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-2\sqrt{2}, 0, 2\sqrt{2}\}.$$

d) Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

- ☒ Wahr ☐ Falsch Ist $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ein Eigenvektor von $\mathbf{A}$, dann ist auch $\alpha\mathbf{x}$ für $\alpha \neq 0$ ein Eigenvektor von $\mathbf{A}$.
- ☒ Wahr ☐ Falsch Eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn die Spalten von $\mathbf{A}$ linear unabhängig sind.
- ☐ Wahr ☒ Falsch Der Eigenraum zu einem Eigenwert λ entspricht der Menge aller Eigenvektoren zum Eigenwert λ .

4. (19.5 Punkte)

a) Gegeben sind $\mathbf{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ und $\mathbf{g}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\mathbf{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Ableitungsmatrix $(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})'$ unter Verwendung der mehrdimensionalen Kettenregel.

Hinweis: Wenn Sie zuerst die Verkettung berechnen und diese ableiten erhalten Sie keine Punkte!

Lösung: $(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})'(t) = \begin{pmatrix} 2t - e^t \\ e^t t(2 + t) \end{pmatrix}.$

b) Berechnen Sie für die Funktion

$$f: (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = \ln(x_1 x_2)$$

die maximale Steigung im Punkt $\mathbf{x}_0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$. Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Lösung: $\|\text{grad } f(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})\| = \sqrt{13}$

c) Berechnen Sie die Tangentialebene an den Graphen von

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = \sin(\pi x_1 x_2)$$

in $\mathbf{x}_0 = (1, 2)$.

Lösung: $x_3 = 2\pi(x_1 - 1) + \pi(x_2 - 2)$

d) Berechnen Sie für

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = 1 + x_2^2 - e^{x_1^2}$$

die stationären Punkte. Entscheiden Sie jeweils ob es sich um eine Maximal- oder Minimalstelle bzw. um einen Sattelpunkt handelt.

Lösung: $\mathbf{x} = (0, 0)$ ist ein Sattelpunkt.

e) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☒ Wahr ☐ Falsch Die Menge $M \subset \mathbb{R}^2$ mit $M = [0, 1] \times [-1, 1]$ ist abgeschlossen.

☐ Wahr ☒ Falsch Die Höhenlinien der Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 + 5$ sind Kreise.

☒ Wahr ☐ Falsch Bei einer partiell differenzierbaren Funktion $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist die Ableitungsmatrix eine $m \times n$ -Matrix.

5. (19 Punkte)

a) Berechnen Sie das Integral

$$\iint_U e^x + \cos(y) \, dx \, dy$$

über dem Normalbereich

$$U = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \ln(2), \frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{3\pi}{2} \right\}.$$

Lösung: $\iint_U e^x + \cos(y) \, dx \, dy = \pi - 2 \ln(2)$

b) Berechnen Sie mit Polarkoordinaten das Integral

$$\iint_U \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy,$$

wobei

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$$

ist.

Lösung: $\int_0^2 \int_0^{2\pi} r \sqrt{(r \cos(\varphi))^2 + (r \sin(\varphi))^2} \, d\varphi \, dr = \frac{16\pi}{3}$

c) Zu einer stetigen Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ betrachten wir das Integral

$$\int_0^2 \int_{y-1}^1 f(x, y) \, dx \, dy.$$

Bestimmen Sie die Integrationsgrenzen nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge, d. h. finden Sie a , b , $y_0(x)$ und $y_1(x)$, sodass

$$\int_0^2 \int_{y-1}^1 f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \int_{y_0(x)}^{y_1(x)} f(x, y) \, dy \, dx.$$

gilt.

Lösung: $a = -1$, $b = 1$, $y_0(x) = 0$, $y_1(x) = x + 1$

d) Berechnen Sie mit Zylinderkoordinaten das Integral

$$\iiint_U (x + z) \, dx \, dy \, dz,$$

wobei U der Zylinder mit Höhe 2 und dem Einheitskreis in der xy -Ebene als Grundfläche ist.

Lösung: $\int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r \cos(\varphi) + z) r \, dr \, d\varphi \, dz = 2\pi$

- e) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr ☐ Falsch Ein Normalbereich bezüglich x muss kein Normalbereich bezüglich y sein.

■ Wahr ☐ Falsch Für den Flächeninhalt $|U|$ eines Normalbereichs U gilt

$$|U| = \iint_U 1 \, dx \, dy.$$