Klausur zu Höhere Mathematik II BNUW SoSe 2024

Gesamtzahl der Aufgaben: 6, Gesamtpunktzahl: 60, Bearbeitungszeit: 120 Minuten

1. (10 Punkte)

   a) Berechnen Sie die kartesische Form der komplexe Zahl

$$z = \frac{5}{\mathrm{i} - 2} - 4\mathrm{i}.$$

Lösung: $z = -2 - 5\mathrm{i}$

   b) i) Berechnen Sie die Lösungen von

$$z^4 = -\mathrm{i}$$

in Polarform. Die kartesische Form muss **nicht** berechnet werden.

Lösung: $z_0 = e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{8}},\ z_1 = e^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{8}},\ z_2 = e^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{8}},\ z_3 = e^{\mathrm{i}\frac{15\pi}{8}}$

   ii) Berechnen Sie die Polarform von

$$z = 3 - \sqrt{3}\mathrm{i}.$$

Lösung: $z = \sqrt{12}e^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{6}}$

Sie können dabei die folgende Tabelle nutzen.

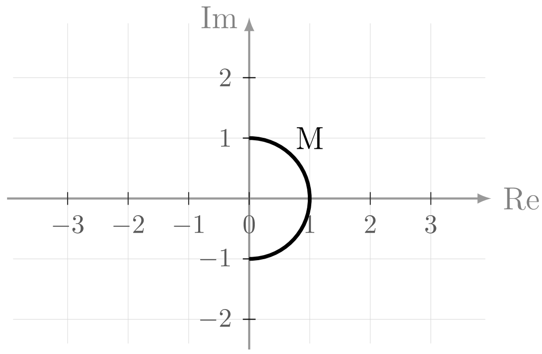
ϕ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin(\phi)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos(\phi)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

   c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort −1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr ☐ Falsch Es gilt $\overline{e^{-4\pi\mathrm{i}}} = 1$.

☐ Wahr ■ Falsch Die Skizze zeigt die Menge $M = \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; z = \varphi e^{\pi\mathrm{i}},\ \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\right\}$.


Im
Re
M
2
1
−1
−2
−3
−2
−1
0
1
2
3

2. (7.5 Punkte)

a) Berechnen Sie

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}$$

für die Matrizen

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie durch den Gauß-Algorithmus die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie zusätzlich Rang($\boldsymbol{A}$) an.

Lösung: $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, Rang$(\boldsymbol{A}) = 3$.

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ■ Falsch Es gibt lineare Gleichungssysteme, die genau drei verschiedene Lösungsvektoren besitzen.

■ Wahr ☐ Falsch Für jede Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ist der Nullvektor $\boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^n$ in Kern$(\boldsymbol{A})$ enthalten.

3. (14 Punkte)

a) Berechnen Sie die Lösung der Matrixgleichung $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{D}$ mit

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung: $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

b) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie mit Begründung, ob die Matrix $\boldsymbol{A}$ invertierbar ist.

Lösung: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1 + \mathrm{i},\ \lambda_3 = 1 - \mathrm{i}$. Die Matrix ist invertierbar.

c) Bestimmen Sie den Eigenraum der Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

zum Eigenwert $\lambda = -3$.

Lösung: Der Eigenraum ist span $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

d) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ■ Falsch Ist $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar, so gilt $\det\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right) = \det \boldsymbol{A}$.

☐ Wahr ■ Falsch Für $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt $\det(\boldsymbol{AA}) = 2 \det \boldsymbol{A}$.

4. (13.5 Punkte)

a) Bestimmen Sie das Innere $\overset{\circ}{M}$ sowie den Abschluss $\overline{M}$ der Menge

$$M = ((-1,1] \times [0,1)) \setminus \{\mathbf{0}\} .$$

$\overset{\circ}{M} =$ $(-1,1) \times (0,1)$

$\overline{M} =$ $[-1,1] \times [0,1]$

b) Berechnen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}_0)$ im Punkt $\boldsymbol{x}_0 = (0,1)$ in Richtung $\boldsymbol{a} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ für die Abbildung

$$\boldsymbol{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{f}(x_1,x_2) = \begin{pmatrix}\sin(x_1)\\ x_1 e^{x_2}\\ 5x_1^2 + x_2^3\end{pmatrix} .$$

Lösung:

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}_0) = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\ e\\ 6\end{pmatrix}$$

c) Berechnen Sie die maximale Steigung in $\boldsymbol{x}_0 = (2,1)$ für die Funktion

$$f\colon (\mathbb{R}^+)^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x_1,x_2) = x_1 \ln(x_2^2) .$$

Lösung: $\|\text{grad}\, f(\boldsymbol{x}_0)\| = 4$

d) Die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x_1,x_2) = 1 - x_1^3 - x_2^2 + x_1^3 x_2^2$$

hat den Gradient

$$\text{grad}\, f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix}-3x_1^2 + 3x_1^2 x_2^2\\ -2x_2 + 2x_1^3 x_2\end{pmatrix}$$

und $\boldsymbol{x}_0 = (1,1)$ als stationäre Stelle. Untersuchen Sie, ob es sich bei $\boldsymbol{x}_0$ um eine Maximal-, Minimal- oder Sattelstelle handelt.

Lösung: $\boldsymbol{x}_0$ ist eine Sattelstelle.

e) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort $+1$ Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr ☐ Falsch — Gegeben ist eine differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, sowie $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$ mit $\|\boldsymbol{a}\| = 1$. Gilt hierbei die Eigenschaft $\langle \text{grad}\, f(\boldsymbol{x}_0), \boldsymbol{a}\rangle = 0$, so ist die Richtungsableitung von f an der Stelle $\boldsymbol{x}_0$ in Richtung $\boldsymbol{a}$ ebenfalls Null.

■ Wahr ☐ Falsch — Es gibt partiell differenzierbare Funktionen, die nicht differenzierbar sind.

5. (9 Punkte)

a) Berechnen Sie den Flächeninhalt $|U|$ von

$$U = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq y \leq \pi, 0 \leq x \leq \sin(y)\right\} .$$

Lösung: $|U| = 2$.

b) Berechnen Sie das Integral

$$\iint_U 3xy^2 \, dx \, dy,$$

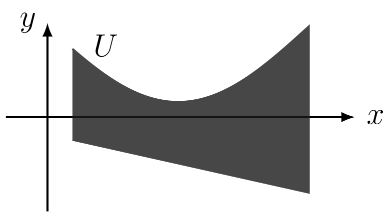
wobei U das Dreieck mit Eckpunkten $(-1, 1)$, $(1, -1)$ und $(1, 1)$ ist.

Lösung: $\displaystyle\iint_U 3xy^2 \, dx \, dy = \frac{2}{5}$.

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort −1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr ☐ Falsch Die unten abgebildete Menge U ist ein Normalbereich bezüglich y in $\mathbb{R}^2$.



☐ Wahr ■ Falsch Ist U die linke Hälfte der Kreisscheibe um $(0, 0)$ mit Radius 3, dann lässt sich das Integral $\iint_U f(x, y) \, dx \, dy$ durch Polarkoordinaten in der Form

$$\int_0^3 \int_0^\pi f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) r \, dr \, d\varphi$$

schreiben.

6. (6 Punkte)

a) Berechnen Sie alle Lösungen der folgenden Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen:

$$y' = e^x y^2 \,.$$

Lösung: Die Lösungen sind $y(x) = 0$ sowie $y(x) = -(e^x + C)^{-1},\ C \in \mathbb{R}$.

b) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'' - 2y' + y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0\,.$$

Lösung: $y(x) = e^x - xe^x$.