**Nachname:**

**Vorname:**

**Matrikelnummer:**

# Klausur zu Höhere Mathematik II Maschinenbau SoSe 2024

**Gesamtzahl der Aufgaben: 5, Gesamtpunktzahl: 60, Bearbeitungszeit: 120 Minuten**

1. (10 Punkte)

   a) Berechnen Sie die kartesische Form der komplexe Zahl

$$z = \frac{5}{\mathrm{i} - 2} - 4\mathrm{i}.$$

   b) i) Berechnen Sie die Lösungen von

$$z^4 = -\mathrm{i}$$

   in Polarform. Die kartesische Form muss **nicht** berechnet werden.

   ii) Berechnen Sie die Polarform von

$$z = 3 - \sqrt{3}\mathrm{i}.$$

   Sie können dabei die folgende Tabelle nutzen.

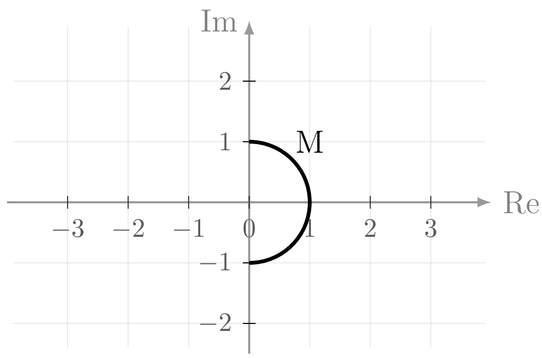
| $\phi$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{7\pi}{4}$ | $\frac{11\pi}{6}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin(\phi)$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | -1 | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ |
| $\cos(\phi)$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | -1 | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ |

   c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort $+1$ Punkt(e), jede fehlende Antwort $0$ Punkte, jede falsche Antwort $-1$ Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

   Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

   ☐ Wahr ☐ Falsch Es gilt $\overline{e^{-4\pi\mathrm{i}}} = 1$.

   ☐ Wahr ☐ Falsch Die Skizze zeigt die Menge $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; z = \varphi e^{\pi\mathrm{i}},\ \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \right\}$.



2. (7.5 Punkte)

a) Berechnen Sie

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}$$

für die Matrizen

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie durch den Gauß-Algorithmus die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ mit

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie zusätzlich Rang($\boldsymbol{A}$) an.

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* $0$ *Punkte, jede falsche Antwort* $-1$ *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☐ Falsch Es gibt lineare Gleichungssysteme, die genau drei verschiedene Lösungsvektoren besitzen.

☐ Wahr ☐ Falsch Für jede Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ist der Nullvektor $\boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^n$ in Kern($\boldsymbol{A}$) enthalten.

3. (14 Punkte)

a) Berechnen Sie die Lösung der Matrixgleichung $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{D}$ mit

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie mit Begründung, ob die Matrix $\boldsymbol{A}$ invertierbar ist.

c) Bestimmen Sie den Eigenraum der Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

zum Eigenwert $\lambda = -3$.

d) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort −1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☐ Falsch Ist $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar, so gilt $\det\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right) = \det \boldsymbol{A}$.

☐ Wahr ☐ Falsch Für $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt $\det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}) = 2 \det \boldsymbol{A}$.

4. (13.5 Punkte)

a) Bestimmen Sie das Innere $\overset{\circ}{M}$ sowie den Abschluss $\overline{M}$ der Menge

$$M = ((-1,1] \times [0,1)) \setminus \{\mathbf{0}\} .$$

$\overset{\circ}{M} =$ ______________________

$\overline{M} =$ ______________________

b) Berechnen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}_0)$ im Punkt $\boldsymbol{x}_0 = (0,1)$ in Richtung $\boldsymbol{a} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ für die Abbildung

$$\boldsymbol{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{f}(x_1,x_2) = \begin{pmatrix}\sin(x_1)\\ x_1 e^{x_2}\\ 5x_1^2 + x_2^3\end{pmatrix} .$$

c) Berechnen Sie die maximale Steigung in $\boldsymbol{x}_0 = (2,1)$ für die Funktion

$$f\colon (\mathbb{R}^+)^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x_1,x_2) = x_1 \ln(x_2^2) .$$

d) Die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x_1,x_2) = 1 - x_1^3 - x_2^2 + x_1^3 x_2^2$$

hat den Gradient

$$\operatorname{grad} f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix}-3x_1^2 + 3x_1^2 x_2^2\\ -2x_2 + 2x_1^3 x_2\end{pmatrix}$$

und $\boldsymbol{x}_0 = (1,1)$ als stationäre Stelle. Untersuchen Sie, ob es sich bei $\boldsymbol{x}_0$ um eine Maximal-, Minimal- oder Sattelstelle handelt.

e) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort −1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☐ Falsch Gegeben ist eine differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, sowie $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$ mit $\|\boldsymbol{a}\| = 1$. Gilt hierbei die Eigenschaft $\langle \operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}_0), \boldsymbol{a}\rangle = 0$, so ist die Richtungsableitung von $f$ an der Stelle $\boldsymbol{x}_0$ in Richtung $\boldsymbol{a}$ ebenfalls Null.

☐ Wahr ☐ Falsch Es gibt partiell differenzierbare Funktionen, die nicht differenzierbar sind.

5. (15 Punkte)

a) Berechnen Sie den Flächeninhalt $|U|$ von

$$U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq y \leq \pi, 0 \leq x \leq \sin(y)\right\} .$$

b) Berechnen Sie das Integral

$$\iint_U 3xy^2 \, dx \, dy,$$

wobei $U$ das Dreieck mit Eckpunkten $(-1,1)$, $(1,-1)$ und $(1,1)$ ist.

c) Zu einer stetigen Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ betrachten wir das Integral

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} f(x,y) \, dy \, dx.$$

i) Skizzieren Sie das Integrationsgebiet.

ii) Bestimmen Sie die Integrationsgrenzen nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge, d. h. finden Sie $a$, $b$, $x_0(y)$ und $x_1(y)$, sodass

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} f(x,y) \, dy \, dx = \int_a^b \int_{x_0(y)}^{x_1(y)} f(x,y) \, dx \, dy.$$

gilt.

d) Berechnen Sie mit Zylinderkoordinaten das Integral

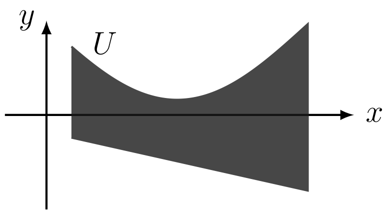
$$\iiint_U z^2 \, dx \, dy \, dz,$$

wobei $U$ der Zylinder mit Höhe 1 und dem Einheitskreis in der $xy$-Ebene als Grundfläche ist.

e) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort $+1$ Punkt(e), jede fehlende Antwort $0$ Punkte, jede falsche Antwort $-1$ Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☐ Falsch Die unten abgebildete Menge $U$ ist ein Normalbereich bezüglich $y$ in $\mathbb{R}^2$.




☐ Wahr ☐ Falsch Ist $U$ die linke Hälfte der Kreisscheibe um $(0,0)$ mit Radius 3, dann lässt sich das Integral $\iint_U f(x,y) \, dx \, dy$ durch Polarkoordinaten in der Form

$$\int_0^3 \int_0^{\pi} f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) r \, dr \, d\varphi$$

schreiben.