

**Klausur zu
Höhere Mathematik II
Maschinenbau
SoSe 2024**

Gesamtzahl der Aufgaben: 5, Gesamtpunktzahl: 60, Bearbeitungszeit: 120 Minuten

1. (10 Punkte)

a) Berechnen Sie die kartesische Form der komplexe Zahl

$$z = \frac{5}{i-2} - 4i.$$

Lösung: $z = -2 - 5i$

b) i) Berechnen Sie die Lösungen von

$$z^4 = -i$$

in Polarform. Die kartesische Form muss **nicht** berechnet werden.

Lösung: $z_0 = e^{i\frac{3\pi}{8}}, z_1 = e^{i\frac{7\pi}{8}}, z_2 = e^{i\frac{11\pi}{8}}, z_3 = e^{i\frac{15\pi}{8}}$

ii) Berechnen Sie die Polarform von

$$z = 3 - \sqrt{3}i.$$

Lösung: $z = \sqrt{12}e^{i\frac{11\pi}{6}}$

Sie können dabei die folgende Tabelle nutzen.

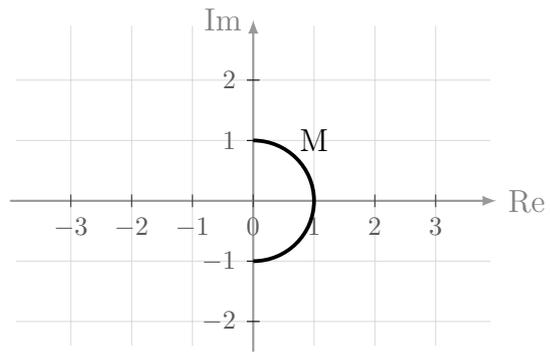
ϕ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin(\phi)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos(\phi)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

c) Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Wahr Falsch Es gilt $\overline{e^{-4\pi i}} = 1$.

Wahr Falsch Die Skizze zeigt die Menge $M = \{z \in \mathbb{C} \mid z = \varphi e^{\pi i}, \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\}$.



2. (7.5 Punkte)

a) Berechnen Sie

$$\mathbf{A}^T \mathbf{B}$$

für die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie durch den Gauß-Algorithmus die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie zusätzlich $\text{Rang}(\mathbf{A})$ an.

Lösung: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\text{Rang}(\mathbf{A}) = 3$.

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Wahr Falsch Es gibt lineare Gleichungssysteme, die genau drei verschiedene Lösungsvektoren besitzen.

Wahr Falsch Für jede Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist der Nullvektor $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ in $\text{Kern}(\mathbf{A})$ enthalten.

3. (14 Punkte)

a) Berechnen Sie die Lösung der Matrixgleichung $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{D}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung: $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

b) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie mit Begründung, ob die Matrix \mathbf{A} invertierbar ist.

Lösung: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1 + i$, $\lambda_3 = 1 - i$. Die Matrix ist invertierbar.

c) Bestimmen Sie den Eigenraum der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

zum Eigenwert $\lambda = -3$.

Lösung: Der Eigenraum ist $\text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

d) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Wahr Falsch Ist $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar, so gilt $\det(\mathbf{A}^{-1}) = \det \mathbf{A}$.

Wahr Falsch Für $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt $\det(\mathbf{A}\mathbf{A}) = 2 \det \mathbf{A}$.

4. (13.5 Punkte)

a) Bestimmen Sie das Innere $\overset{\circ}{M}$ sowie den Abschluss \overline{M} der Menge

$$M = ((-1, 1] \times [0, 1)) \setminus \{0\}.$$

$$\overset{\circ}{M} = \underline{(-1, 1) \times (0, 1)}$$

$$\overline{M} = \underline{[-1, 1] \times [0, 1]}$$

b) Berechnen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{a}}(\mathbf{x}_0)$ im Punkt $\mathbf{x}_0 = (0, 1)$ in Richtung $\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ für die Abbildung

$$\mathbf{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \sin(x_1) \\ x_1 e^{x_2} \\ 5x_1^2 + x_2^3 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{a}}(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ e \\ 6 \end{pmatrix}$$

c) Berechnen Sie die maximale Steigung in $\mathbf{x}_0 = (2, 1)$ für die Funktion

$$f: (\mathbb{R}^+)^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = x_1 \ln(x_2^2).$$

Lösung: $\|\text{grad } f(\mathbf{x}_0)\| = 4$

d) Die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = 1 - x_1^3 - x_2^2 + x_1^3 x_2^2$$

hat den Gradient

$$\text{grad } f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -3x_1^2 + 3x_1^2 x_2^2 \\ -2x_2 + 2x_1^3 x_2 \end{pmatrix}$$

und $\mathbf{x}_0 = (1, 1)$ als stationäre Stelle. Untersuchen Sie, ob es sich bei \mathbf{x}_0 um eine Maximal-, Minimal- oder Sattelstelle handelt.

Lösung: \mathbf{x}_0 ist eine Sattelstelle.

e) Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr □ Falsch Gegeben ist eine differenzierbare Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, sowie $\mathbf{x}_0, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ mit $\|\mathbf{a}\| = 1$. Gilt hierbei die Eigenschaft $\langle \text{grad } f(\mathbf{x}_0), \mathbf{a} \rangle = 0$, so ist die Richtungsableitung von f an der Stelle \mathbf{x}_0 in Richtung \mathbf{a} ebenfalls Null.

■ Wahr □ Falsch Es gibt partiell differenzierbare Funktionen, die nicht differenzierbar sind.

5. (15 Punkte)

a) Berechnen Sie den Flächeninhalt $|U|$ von

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq \pi, 0 \leq x \leq \sin(y)\}.$$

Lösung: $|U| = 2.$

b) Berechnen Sie das Integral

$$\iint_U 3xy^2 \, dx \, dy,$$

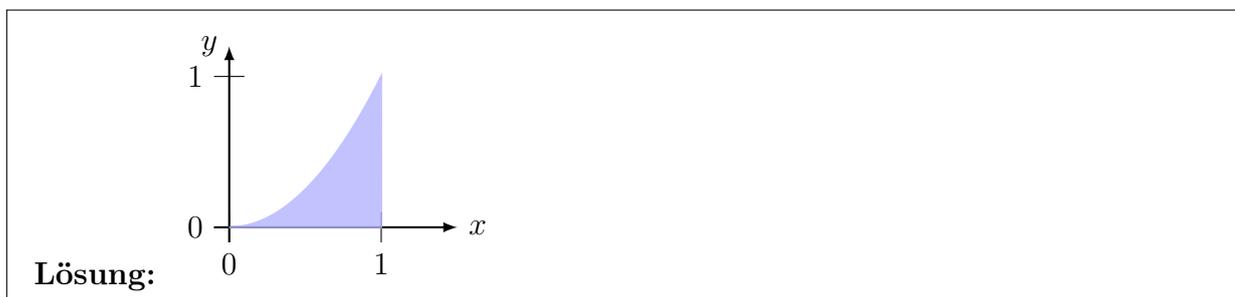
wobei U das Dreieck mit Eckpunkten $(-1, 1)$, $(1, -1)$ und $(1, 1)$ ist.

Lösung: $\iint_U 3xy^2 \, dx \, dy = \frac{2}{5}.$

c) Zu einer stetigen Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ betrachten wir das Integral

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} f(x, y) \, dy \, dx.$$

i) Skizzieren Sie das Integrationsgebiet.



ii) Bestimmen Sie die Integrationsgrenzen nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge, d. h. finden Sie a , b , $x_0(y)$ und $x_1(y)$, sodass

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} f(x, y) \, dy \, dx = \int_a^b \int_{x_0(y)}^{x_1(y)} f(x, y) \, dx \, dy.$$

gilt.

Lösung: $a = 0$, $b = 1$, $x_0(y) = \sqrt{y}$, $x_1(y) = 1$

d) Berechnen Sie mit Zylinderkoordinaten das Integral

$$\iiint_U z^2 \, dx \, dy \, dz,$$

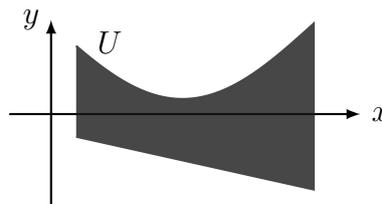
wobei U der Zylinder mit Höhe 1 und dem Einheitskreis in der xy -Ebene als Grundfläche ist.

$$\text{Lösung: } \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 z^2 r \, dr \, d\varphi \, dz = \frac{\pi}{3}.$$

e) Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Wahr Falsch Die unten abgebildete Menge U ist ein Normalbereich bezüglich y in \mathbb{R}^2 .



Wahr Falsch Ist U die linke Hälfte der Kreisscheibe um $(0, 0)$ mit Radius 3, dann lässt sich das Integral $\iint_U f(x, y) \, dx \, dy$ durch Polarkoordinaten in der Form

$$\int_0^3 \int_0^\pi f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) r \, dr \, d\varphi$$

schreiben.