Klausur zu
Höhere Mathematik II
BNUW
WiSe 2023/2024

Gesamtzahl der Aufgaben: 6, Gesamtpunktzahl: 60, Bearbeitungszeit: 120 Minuten

1. (8.5 Punkte)

a) Berechnen Sie die kartesische Form der Lösung $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$(1 + i)z + 3 = 2i.$$

Lösung: $z = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$

b) Geben Sie die Lösungen von

$$(z + i)^2 = -2i$$

in kartesischer Form an. Sie können dabei die folgende Tabelle nutzen.

ϕ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin(\phi)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos(\phi)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Lösung: $z_0 = -1, z_1 = 1 - 2i$

c) Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr □ Falsch Die Menge $M = \{z \in \mathbb{C} \mid z = e^{i\varphi}, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$ stellt einen Kreis mit Radius 1 um den Ursprung in der Gaußschen Zahlenebene dar.

■ Wahr □ Falsch Es gilt $e^{-i\frac{\pi}{2}} = \bar{i}$.

2. (6.5 Punkte)

- a) Bestimmen Sie durch den Gauß-Algorithmus die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie zusätzlich $\text{Rang}(\mathbf{A})$ an.

Lösung: Das lineare Gleichungssystem hat keine Lösung. $\text{Rang}(\mathbf{A}) = 2$.

- b) Entscheiden Sie, ob die Spalten der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind. Falls die Spaltenvektoren linear abhängig sind, stellen Sie einen Spaltenvektor als Linearkombination der anderen Spaltenvektoren dar.

Lösung: Die Spalten sind linear unabhängig.

- c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Wahr Falsch Der Kern einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ kann die leere Menge sein.

Wahr Falsch Ist einer der Vektoren $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$ der Nullvektor, dann sind die Vektoren linear abhängig.

3. (10 Punkte)

- a) Berechnen Sie die Lösung der Matrixgleichung $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{X}\mathbf{B} = \mathbf{E}$ mit der Einheitsmatrix $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ und

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lösung: $\mathbf{X} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

- b) Bestimmen Sie alle Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$, für welche die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 0 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 2 \end{pmatrix}$$

regulär ist.

Lösung: Die Matrix $\mathbf{A}$ ist regulär für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$.

- c) Bestimmen Sie die Eigenvektoren der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

zum Eigenwert $\lambda = 3$.

Lösung: $\mathbf{x} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $(s, t) \neq (0, 0)$

- d) Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr □ Falsch Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ Eigenwert einer reellen Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dann ist auch $\bar{\lambda}$ Eigenwert der Matrix $\mathbf{A}$.

■ Wahr □ Falsch Die inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ einer invertierbaren Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist eindeutig bestimmt.

4. (19 Punkte)

a) Berechnen Sie die Funktionalmatrix $(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})'(\mathbf{x})$ für die Funktionen

$$\mathbf{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \sin(x_1 + x_2) \\ \cos(x_1 x_2) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{g}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{g}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_2^2 \end{pmatrix}$$

mit der mehrdimensionalen Kettenregel.

Hinweis: Sie erhalten nur dann Punkte, wenn Sie die mehrdimensionale Kettenregel nutzen.

Lösung: $(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2 \cos(x_1 + x_2) & 2 \cos(x_1 + x_2) \\ -2x_2 \cos(x_1 x_2) \sin(x_1 x_2) & -2x_1 \cos(x_1 x_2) \sin(x_1 x_2) \end{pmatrix}$

b) Berechnen Sie für die Funktion

$$f: \mathbb{R} \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = e^{x_1} \ln(x_2)$$

das Taylorpolynom ersten Grades $T_1(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0)$ mit $\mathbf{x}_0 = (2, e^2)$. Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich. Geben Sie zusätzlich die Tangentialebene an den Graphen von f an der Stelle $\mathbf{x}_0$ an.

Lösung: $T_1(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0) = e^2(2x_1 - 3) + x_2$. Tangentialebene: $2e^2x_1 + x_2 - x_3 = 3e^2$

c) Berechnen Sie für die Funktion

$$\mathbf{f}: (0, \infty) \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2 \sqrt{x_1} \\ x_1 x_2^{-1} \\ 3 \end{pmatrix}$$

die Richtungsableitung $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{a}}(\mathbf{x}_0)$ mit $\mathbf{x}_0 = (2, 2)$ und $\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^T$.

Lösung: $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{a}}(\mathbf{x}_0) = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) Berechnen Sie für

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2$$

die stationären Punkte. Entscheiden Sie jeweils, ob es sich um eine Maximal- oder Minimalstelle bzw. um einen Sattelpunkt handelt.

Lösung: $\mathbf{x} = (0, 0, 0)$ ist ein Sattelpunkt.

e) Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

- Wahr Falsch Eine abgeschlossene Menge enthält alle ihre Randpunkte.
- Wahr Falsch Wenn bei einer Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ die zweiten partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}_0)$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{x}_0)$ existieren, dann sind diese Ableitungen immer identisch.

5. (10 Punkte)

a) Berechnen Sie das Integral

$$\iint_U y\sqrt{x} \, dx \, dy$$

über dem Normalbereich

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y^2\}.$$

Lösung: $\iint_U y\sqrt{x} \, dx \, dy = \frac{2}{15}$

b) Berechnen Sie mit Polarkoordinaten das Integral

$$\iint_U 2e^{x^2+y^2} \, dx \, dy,$$

wobei $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ die Einheitskreisscheibe ist.

Lösung: $\int_0^1 \int_0^{2\pi} 2re^{(r \cos(\varphi))^2 + (r \sin(\varphi))^2} \, d\varphi \, dr = 2\pi(e - 1)$

c) Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Wahr Falsch Jeder Normalbereich bezüglich x ist auch ein Normalbereich bezüglich y .

Wahr Falsch Bei Integration einer stetigen Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gilt stets

$$\int_1^2 \int_0^x f(x, y) \, dy \, dx = \int_0^x \int_1^2 f(x, y) \, dx \, dy.$$

6. (6 Punkte)

a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y' = \frac{y}{x} + 13 \quad (x > 0).$$

Lösung: $y(x) = cx + 13x \ln(x)$ ($c \in \mathbb{R}$)

b) Berechnen Sie ein reelles Fundamentalsystem zu der linearen Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' - 6y' + 13y = 0.$$

Lösung: $(e^{3x} \sin(2x), e^{3x} \cos(2x))$ ist ein FS zu der DGL.