Nachname:

Vorname:

Matrikelnummer:

Klausur zu Höhere Mathematik II Maschinenbau WiSe 2023/2024

Gesamtzahl der Aufgaben: 5, **Gesamtpunktzahl: 60,** **Bearbeitungszeit: 120 Minuten**

1. (8.5 Punkte)

   a) Berechnen Sie die kartesische Form der Lösung $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

   $$(1+\mathrm{i})z + 3 = 2\mathrm{i}.$$

   b) Geben Sie die Lösungen von

   $$(z+\mathrm{i})^2 = -2\mathrm{i}$$

   in kartesischer Form an. Sie können dabei die folgende Tabelle nutzen.

ϕ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin(\phi)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos(\phi)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

   c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

   Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

   ☐ Wahr ☐ Falsch Die Menge $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, z = e^{\mathrm{i}\varphi},\ 0 \le \varphi < 2\pi \right\}$ stellt einen Kreis mit Radius 1 um den Ursprung in der Gaußschen Zahlenebene dar.

   ☐ Wahr ☐ Falsch Es gilt $e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \overline{\mathrm{i}}$.

2. (6.5 Punkte)

   a) Bestimmen Sie durch den Gauß-Algorithmus die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ mit

   $$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Geben Sie zusätzlich $\mathrm{Rang}(\boldsymbol{A})$ an.

b) Entscheiden Sie, ob die Spalten der Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind. Falls die Spaltenvektoren linear abhängig sind, stellen Sie einen Spaltenvektor als Linearkombination der anderen Spaltenvektoren dar.

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☐ Falsch Der Kern einer Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ kann die leere Menge sein.

☐ Wahr ☐ Falsch Ist einer der Vektoren $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in \mathbb{R}^n$ der Nullvektor, dann sind die Vektoren linear abhängig.

3. (10 Punkte)

a) Berechnen Sie die Lösung der Matrixgleichung $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}$ mit der Einheitsmatrix $\boldsymbol{E} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie alle Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$, für welche die Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 0 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 2 \end{pmatrix}$$

regulär ist.

c) Bestimmen Sie die Eigenvektoren der Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

zum Eigenwert $\lambda = 3$.

d) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☐ Falsch Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ Eigenwert einer reellen Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, dann ist auch $\overline{\lambda}$ Eigenwert der Matrix $\boldsymbol{A}$.

☐ Wahr ☐ Falsch Die inverse Matrix $\boldsymbol{A}^{-1}$ einer invertierbaren Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist eindeutig bestimmt.

4. (19 Punkte)

a) Berechnen Sie die Funktionalmatrix $(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})'(\boldsymbol{x})$ für die Funktionen

$$\boldsymbol{f} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \sin(x_1 + x_2) \\ \cos(x_1 x_2) \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{g} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{g}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_2^2 \end{pmatrix}$$

mit der mehrdimensionalen Kettenregel.

Hinweis: Sie erhalten nur dann Punkte, wenn Sie die mehrdimensionale Kettenregel nutzen.

b) Berechnen Sie für die Funktion

$$f \colon \mathbb{R} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = e^{x_1} \ln(x_2)$$

das Taylorpolynom ersten Grades $T_1(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{x}_0)$ mit $\boldsymbol{x}_0 = (2, e^2)$. Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich. Geben Sie zusätzlich die Tangentialebene an den Graphen von f an der Stelle $\boldsymbol{x}_0$ an.

c) Berechnen Sie für die Funktion

$$\boldsymbol{f} \colon (0, \infty) \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2 \sqrt{x_1} \\ x_1 x_2^{-1} \\ 3 \end{pmatrix}$$

die Richtungsableitung $\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}_0)$ mit $\boldsymbol{x}_0 = (2, 2)$ und $\boldsymbol{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^T$.

d) Berechnen Sie für

$$f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \; f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2$$

die stationären Punkte. Entscheiden Sie jeweils, ob es sich um eine Maximal- oder Minimalstelle bzw. um einen Sattelpunkt handelt.

e) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☐ Falsch Eine abgeschlossene Menge enthält alle ihre Randpunkte.

☐ Wahr ☐ Falsch Wenn bei einer Funktion $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die zweiten partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\boldsymbol{x}_0)$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\boldsymbol{x}_0)$ existieren, dann sind diese Ableitungen immer identisch.

5. (16 Punkte)

a) Berechnen Sie das Integral

$$\iint_U y \sqrt{x} \, dx \, dy$$

über dem Normalbereich

$$U = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq y \leq 1, \; 0 \leq x \leq y^2 \right\}.$$

b) Berechnen Sie mit Polarkoordinaten das Integral

$$\iint_U 2e^{x^2+y^2}\,dx\,dy,$$

wobei $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$ die Einheitkreisscheibe ist.

c) Zu einer stetigen Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ betrachten wir das Integral

$$\int_{-1}^{1}\int_{2-2x}^{4} f(x,y)\,dy\,dx.$$

Bestimmen Sie die Integrationsgrenzen nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge, d. h. finden Sie a, b, $x_0(y)$ und $x_1(y)$, sodass

$$\int_{-1}^{1}\int_{2-2x}^{4} f(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b \int_{x_0(y)}^{x_1(y)} f(x,y)\,dx\,dy.$$

gilt.

d) Die Transformation

$$\boldsymbol{T}(r,\varphi) = \frac{r}{2}\begin{pmatrix} a\cos(\varphi) \\ b\sin(\varphi)\end{pmatrix}$$

bildet das Rechteck $[0,1]\times[0,2\pi)$ auf eine achsensymmetrische Ellipse mit x-Durchmesser a und y-Durchmesser b ab. Berechnen Sie den Flächeninhalt einer achsensymmetrischen Ellipse mit x-Durchmesser 2 und y-Durchmesser 3 mit Hilfe des Transformationssatzes.

e) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☐ Falsch Jeder Normalbereich bezüglich x ist auch ein Normalbereich bezüglich y.

☐ Wahr ☐ Falsch Bei Integration einer stetigen Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gilt stets

$$\int_1^2\int_0^x f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^x\int_1^2 f(x,y)\,dx\,dy.$$