

Klausur zu
Höhere Mathematik II
BNUW
SoSe 2025

Gesamtzahl der Aufgaben: 6, Gesamtpunktzahl: 60, Bearbeitungszeit: 120 Minuten

1. (11.5 Punkte)

In dieser Aufgabe dürfen Sie die folgende Tabelle benutzen.

ϕ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin(\phi)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos(\phi)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

a) Berechnen Sie die kartesische Form der komplexen Zahl

$$z = \frac{100i}{7-i}.$$

Geben Sie ferner $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$ und $\bar{z}$ an.

Lösung: $z = -2 + 14i$, $\operatorname{Re}(z) = -2$, $\operatorname{Im}(z) = 14$, $\bar{z} = -2 - 14i$.

b) Seien

$$z_1 = e^{\frac{\pi}{3}i}, \quad z_2 = 2e^{\frac{3\pi}{4}i}$$

gegeben. Berechnen Sie $\frac{z_1^9}{z_2}$. Das Endergebnis soll in Polarform und in kartesischer Form angegeben werden.

Lösung: $\frac{z_1^9}{z_2} = \frac{1}{2} \exp\left(\frac{\pi}{4}i\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}i$

c) Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$(z+1)^3 = -8$$

in kartesischer Form.

Lösung: $z_1 = -3$, $z_2 = \sqrt{3}i$, $z_3 = -\sqrt{3}i$

d) Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr □ Falsch Wenn $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ eine Nullstelle des Polynoms $f(z) = z^{100} + z + 1$ ist, dann ist $\bar{z}_0$ ebenfalls eine Nullstelle von $f(z)$.

■ Wahr □ Falsch Die Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)\}$ ist eine Gerade in der Gaußschen Zahlenebene.

2. (7.0 Punkte)

- a) Bestimmen Sie durch den Gauß-Algorithmus die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 11 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie ohne zusätzliche Rechnung $\text{Rang}(\mathbf{A})$ und $\det(\mathbf{A})$ an.

Lösung: $L = \emptyset$, $\text{Rang}(\mathbf{A}) = 2$, $\det(\mathbf{A}) = 0$.

- b) Berechnen Sie die Determinante $\det(\mathbf{A})$ der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

durch Laplace-Entwicklung.

Lösung: $\det(\mathbf{A}) = -2$.

- c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☒ Falsch Für alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{1 \times 10}$ gilt $\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{v} \in \mathbb{R}$.

☒ Wahr ☐ Falsch Wenn $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{100 \times 100}$ eine Matrix mit $\text{Rang}(\mathbf{A}) = 90$ ist, dann gilt $\dim(\text{Kern}(\mathbf{A})) = 10$.

3. (10.0 Punkte)

a) Berechnen Sie die Inverse der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung: $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Berechnen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -10 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung: $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \lambda^2 - 2\lambda + 10$. Eigenwerte: $1 \pm 3i$.

c) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

und zu jedem Eigenwert den zugehörigen Eigenraum.

Lösung: 5 ist einziger Eigenwert mit Eigenraum $\text{Span}((1, 0, 0)^T, (0, 1, 0)^T)$.

- d) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

- Wahr □ Falsch Wenn $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ eine Matrix und $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ ein Eigenvektor von $\mathbf{A}$ ist, dann sind die Vektoren $\mathbf{v}$ und $\mathbf{A}\mathbf{v}$ linear abhängig.
- Wahr □ Falsch Wenn $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{11 \times 11}$ eine Matrix vom $\text{Rang}(\mathbf{A}) = 7$ ist, dann ist $\lambda = 0$ ein Eigenwert von $\mathbf{A}$.

4. (15 Punkte)

a) Gegeben sind die Funktionen

$$\mathbf{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ e^{-t} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{g}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ \sin(x_1) \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, ob die Verkettungen $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ und $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ existieren. Falls ja, geben Sie jeweils die Funktionsvorschrift sowie die zugehörige Funktionalmatrix an.

Lösung: $(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(t) = \begin{pmatrix} t^2 e^{-t} \\ \sin(t^2) \end{pmatrix}$, $(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})'(t) = \begin{pmatrix} t e^{-t}(2-t) \\ 2t \cos(t^2) \end{pmatrix}$, die Verkettung $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ existiert nicht.

b) Gegeben ist die Funktion

$$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2}{1 + x_2}.$$

Berechnen Sie die maximale Steigung von f im Punkt $\mathbf{x}_0 = (-1, 1)$.

Lösung: $\text{grad } f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{x_2}{1+x_2} \\ \frac{x_1}{(1+x_2)^2} \end{pmatrix} \implies \|\text{grad } f(-1, 1)\| = \frac{\sqrt{5}}{4}.$

c) Berechnen Sie alle stationären Punkte der Funktion

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2(\ln(x_2) - 1) + e^{x_3^2(x_3+1)}.$$

Lösung: $\text{grad } f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ \ln(x_2) \\ x_3(3x_3 + 2)e^{x_3^2(x_3+1)} \end{pmatrix}$

Stationäre Punkte:

$$\mathbf{x}_1 = (0, 1, 0), \quad \mathbf{x}_2 = (0, 1, -\frac{2}{3})$$

d) Bestimmen Sie, ob der stationäre Punkt $\mathbf{x}_0 = (-2\pi, \pi)$ der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = \sin(x_1) \sin(x_2)$$

eine Maximalstelle, eine Minimalstelle oder eine Sattelstelle ist.

Lösung: $\mathbf{H}f(-1, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & -4\pi^2 \\ -4\pi^2 & 0 \end{pmatrix} \implies \det \mathbf{H}f(-1, \frac{1}{2}) < 0 \implies \mathbf{x}_0 \text{ ist Sattelstelle.}$

e) Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr □ Falsch Der Punkt $(1, 3)$ liegt auf dem Rand der Menge $[0, 2] \times [3, 4]$.

■ Wahr □ Falsch Wenn eine Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ in $\mathbf{x}_0$ differenzierbar ist, dann ist f in $\mathbf{x}_0$ auch partiell differenzierbar.

5. (9.0 Punkte)

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 \int_{\frac{1}{2}}^1 e^{-x} \cos(\pi y) dy dx.$$

Lösung: $\int_0^1 \int_{\frac{1}{2}}^1 e^{-x} \cos(\pi y) dy dx = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{e} - 1 \right)$

b) Skizzieren Sie den Normalbereich

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9, x \leq 0\}$$

und berechnen Sie das Integral

$$\iint_U \sqrt{x^2 + y^2} d(x, y)$$

mit Polarkoordinaten.

Lösung: U ist die linke Hälfte der Einheitsphäre. $\iint_U \sqrt{x^2 + y^2} d(x, y) = 9\pi$

c) Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☒ Falsch Ist ein Integrationsgebiet $U \subset \mathbb{R}^2$ ein Normalbereich bezüglich x , dann kann U kein Normalbereich bezüglich y sein.

☒ Wahr ☐ Falsch Für jede stetige Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy.$$

6. (7.5 Punkte)

a) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \frac{2(x-7)}{e^y}, \quad y(7) = 0.$$

Lösung: $y(x) = \ln(x^2 - 14x + 50)$.

b) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der skalaren linearen DGL 2. Ordnung

$$y'' - 2y' - 15y = 0.$$

Lösung: $y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{5x} \quad (c \in \mathbb{R}^2)$

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☒ Falsch Die Differentialgleichung $y' = y^4 - 1$ hat keine konstanten Lösungen.

☐ Wahr ☒ Falsch Das Problem

$$y'' + y' + y = 0, \quad y(7) = 11$$

hat genau eine Lösung.