

Nachname:

Vorname:

Matrikelnummer:

**Klausur zu  
Höhere Mathematik II  
Maschinenbau  
SoSe 2025**

**Gesamtzahl der Aufgaben: 5,      Gesamtpunktzahl: 60,      Bearbeitungszeit: 120 Minuten**

1. (11.5 Punkte)

In dieser Aufgabe dürfen Sie die folgende Tabelle benutzen.

$\phi$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$\sin(\phi)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos(\phi)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

a) Berechnen Sie die kartesische Form der komplexen Zahl

$$z = \frac{100i}{7 - i}.$$

Geben Sie ferner  $\operatorname{Re}(z)$ ,  $\operatorname{Im}(z)$  und  $\bar{z}$  an.

b) Seien

$$z_1 = e^{\frac{\pi}{3}i}, \quad z_2 = 2e^{\frac{3\pi}{4}i}$$

gegeben. Berechnen Sie  $\frac{z_1^9}{z_2}$ . Das Endergebnis soll in Polarform und in kartesischer Form angegeben werden.

c) Bestimmen Sie alle Lösungen  $z \in \mathbb{C}$  der Gleichung

$$(z + 1)^3 = -8$$

in kartesischer Form.

d) Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr   ☐ Falsch   Wenn  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  eine Nullstelle des Polynoms  $f(z) = z^{100} + z + 1$  ist, dann ist  $\bar{z}_0$  ebenfalls eine Nullstelle von  $f(z)$ .

☐ Wahr   ☐ Falsch   Die Menge  $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)\}$  ist eine Gerade in der Gaußschen Zahlenebene.

2. (7.0 Punkte)

- a) Bestimmen Sie durch den Gauß-Algorithmus die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 11 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie ohne zusätzliche Rechnung  $\text{Rang}(\mathbf{A})$  und  $\det(\mathbf{A})$  an.

- b) Berechnen Sie die Determinante  $\det(\mathbf{A})$  der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

durch Laplace-Entwicklung.

- c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☐ Falsch Für alle  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{1 \times 10}$  gilt  $\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{v} \in \mathbb{R}$ .

☐ Wahr ☐ Falsch Wenn  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{100 \times 100}$  eine Matrix mit  $\text{Rang}(\mathbf{A}) = 90$  ist, dann gilt  $\dim(\text{Kern}(\mathbf{A})) = 10$ .

3. (10.0 Punkte)

- a) Berechnen Sie die Inverse der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- b) Berechnen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -10 & 2 \end{pmatrix}.$$

- c) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

und zu jedem Eigenwert den zugehörigen Eigenraum.

- d) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

- ☐ Wahr ☐ Falsch Wenn  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  eine Matrix und  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  ein Eigenvektor von  $\mathbf{A}$  ist, dann sind die Vektoren  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{A}\mathbf{v}$  linear abhängig.
- ☐ Wahr ☐ Falsch Wenn  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{11 \times 11}$  eine Matrix vom Rang( $\mathbf{A}$ ) = 7 ist, dann ist  $\lambda = 0$  ein Eigenwert von  $\mathbf{A}$ .

4. (15 Punkte)

- a) Gegeben sind die Funktionen

$$\mathbf{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ e^{-t} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{g}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ \sin(x_1) \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, ob die Verkettungen  $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$  und  $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$  existieren. Falls ja, geben Sie jeweils die Funktionsvorschrift sowie die zugehörige Funktionalmatrix an.

- b) Gegeben ist die Funktion

$$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2}{1 + x_2}.$$

Berechnen Sie die maximale Steigung von  $f$  im Punkt  $\mathbf{x}_0 = (-1, 1)$ .

- c) Berechnen Sie alle stationären Punkte der Funktion

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2(\ln(x_2) - 1) + e^{x_3^2(x_3+1)}.$$

- d) Bestimmen Sie, ob der stationäre Punkt  $\mathbf{x}_0 = (-2\pi, \pi)$  der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = \sin(x_1) \sin(x_2)$$

eine Maximalstelle, eine Minimalstelle oder eine Sattelstelle ist.

- e) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

- ☐ Wahr ☐ Falsch Der Punkt  $(1, 3)$  liegt auf dem Rand der Menge  $[0, 2] \times [3, 4]$ .
- ☐ Wahr ☐ Falsch Wenn eine Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  in  $\mathbf{x}_0$  differenzierbar ist, dann ist  $f$  in  $\mathbf{x}_0$  auch partiell differenzierbar.

5. (16.5 Punkte)

- a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 \int_{\frac{1}{2}}^1 e^{-x} \cos(\pi y) \, dy \, dx.$$

b) Skizzieren Sie den Normalbereich

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9, x \leq 0\}$$

und berechnen Sie das Integral

$$\iint_U \sqrt{x^2 + y^2} d(x, y)$$

mit Polarkoordinaten.

c) Berechnen Sie den Oberflächeninhalt  $|S|$  des Graphen der Funktion

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = 4 - 3x + \sqrt{6}y,$$

wobei  $D$  das Dreieck mit den Eckpunkten  $(0, 0)$ ,  $(2, 1)$  und  $(2, -2)$  ist.

d) Die Transformation  $\mathbf{T}: U^* \rightarrow U$  mit

$$\mathbf{T}(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} \xi - \eta \\ 2\xi + \eta \end{pmatrix}$$

bildet das Einheitsdreieck

$$U^* = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1 - \xi\}$$

auf das Dreieck  $U$  mit den Eckpunkten  $(0, 0)$ ,  $(1, 2)$  und  $(-1, 1)$  ab.

Wenden Sie den Transformationssatz mit der Transformation  $\mathbf{T}$  auf das Integral

$$\iint_U (x + y) d(x, y)$$

an. Das Integral selbst soll nicht berechnet werden!

e) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr   ☐ Falsch   Ist ein Integrationsgebiet  $U \subset \mathbb{R}^2$  ein Normalbereich bezüglich  $x$ , dann kann  $U$  kein Normalbereich bezüglich  $y$  sein.

☐ Wahr   ☐ Falsch   Für jede stetige Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  gilt

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy.$$