

Nachname:

Nachname:	
Vorname:	
Matrikelnummer:	

**Klausur zu
Höhere Mathematik II
Maschinenbau
SoSe 2025**

Gesamtzahl der Aufgaben: 5, Gesamtpunktzahl: 60, Bearbeitungszeit: 120 Minuten

1. (11.5 Punkte)

In dieser Aufgabe dürfen Sie die folgende Tabelle benutzen.

ϕ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin(\phi)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos(\phi)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

a) Berechnen Sie die kartesische Form der komplexen Zahl

$$z = \frac{100i}{7-i}.$$

Geben Sie ferner $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$ und \bar{z} an.

b) Seien

$$z_1 = e^{\frac{\pi}{3}i}, \quad z_2 = 2e^{\frac{3\pi}{4}i}$$

gegeben. Berechnen Sie $\frac{z_1^9}{z_2}$. Das Endergebnis soll in Polarform und in kartesischer Form angegeben werden.

c) Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$(z+1)^3 = -8$$

in kartesischer Form.

d) Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Wahr Falsch Wenn $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ eine Nullstelle des Polynoms $f(z) = z^{100} + z + 1$ ist, dann ist \bar{z}_0 ebenfalls eine Nullstelle von $f(z)$.

Wahr Falsch Die Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)\}$ ist eine Gerade in der Gaußschen Zahlenebene.

2. (7.0 Punkte)

- a) Bestimmen Sie durch den Gauß-Algorithmus die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 11 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie ohne zusätzliche Rechnung $\text{Rang}(\mathbf{A})$ und $\det(\mathbf{A})$ an.

- b) Berechnen Sie die Determinante $\det(\mathbf{A})$ der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

durch Laplace-Entwicklung.

- c) Bei dieser Kreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Wahr Falsch Für alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{1 \times 10}$ gilt $\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{v} \in \mathbb{R}$.

Wahr Falsch Wenn $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{100 \times 100}$ eine Matrix mit $\text{Rang}(\mathbf{A}) = 90$ ist, dann gilt $\dim(\text{Kern}(\mathbf{A})) = 10$.

3. (10.0 Punkte)

- a) Berechnen Sie die Inverse der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- b) Berechnen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -10 & 2 \end{pmatrix}.$$

- c) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

und zu jedem Eigenwert den zugehörigen Eigenraum.

- d) Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

- Wahr Falsch Wenn $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ eine Matrix und $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ ein Eigenvektor von \mathbf{A} ist, dann sind die Vektoren \mathbf{v} und \mathbf{Av} linear abhängig.
- Wahr Falsch Wenn $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{11 \times 11}$ eine Matrix vom $\text{Rang}(\mathbf{A}) = 7$ ist, dann ist $\lambda = 0$ ein Eigenwert von \mathbf{A} .

4. (15 Punkte)

- a) Gegeben sind die Funktionen

$$\mathbf{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, f(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ e^{-t} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \mathbf{g}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ \sin(x_1) \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, ob die Verkettungen $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ und $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ existieren. Falls ja, geben Sie jeweils die Funktionsvorschrift sowie die zugehörige Funktionalmatrix an.

- b) Gegeben ist die Funktion

$$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2}{1 + x_2}.$$

Berechnen Sie die maximale Steigung von f im Punkt $\mathbf{x}_0 = (-1, 1)$.

- c) Berechnen Sie alle stationären Punkte der Funktion

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2(\ln(x_2) - 1) + e^{x_3^2(x_3+1)}.$$

- d) Bestimmen Sie, ob der stationäre Punkt $\mathbf{x}_0 = (-2\pi, \pi)$ der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = \sin(x_1) \sin(x_2)$$

eine Maximalstelle, eine Minimalstelle oder eine Sattelstelle ist.

- e) Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

- Wahr Falsch Der Punkt $(1, 3)$ liegt auf dem Rand der Menge $[0, 2] \times [3, 4]$.
- Wahr Falsch Wenn eine Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ in \mathbf{x}_0 differenzierbar ist, dann ist f in \mathbf{x}_0 auch partiell differenzierbar.

5. (16.5 Punkte)

- a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 \int_{\frac{1}{2}}^1 e^{-x} \cos(\pi y) dy dx.$$

b) Skizzieren Sie den Normalbereich

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9, x \leq 0\}$$

und berechnen Sie das Integral

$$\iint_U \sqrt{x^2 + y^2} d(x, y)$$

mit Polarkoordinaten.

c) Berechnen Sie den Oberflächeninhalt $|S|$ des Graphen der Funktion

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = 4 - 3x + \sqrt{6}y,$$

wobei D das Dreieck mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(2, 1)$ und $(2, -2)$ ist.

d) Die Transformation $\mathbf{T}: U^* \rightarrow U$ mit

$$\mathbf{T}(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} \xi - \eta \\ 2\xi + \eta \end{pmatrix}$$

bildet das Einheitsdreieck

$$U^* = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1 - \xi\}$$

auf das Dreieck U mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 2)$ und $(-1, 1)$ ab.

Wenden Sie den Transformationssatz mit der Transformation \mathbf{T} auf das Integral

$$\iint_U (x + y) d(x, y)$$

an. Das Integral selbst soll nicht berechnet werden!

e) Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Wahr Falsch Ist ein Integrationsgebiet $U \subset \mathbb{R}^2$ ein Normalbereich bezüglich x , dann kann U kein Normalbereich bezüglich y sein.

Wahr Falsch Für jede stetige Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy.$$