Klausur zu Höhere Mathematik II Maschinenbau SoSe 2025

Gesamtzahl der Aufgaben: 5, Gesamtpunktzahl: 60, Bearbeitungszeit: 120 Minuten

1. (11.5 Punkte)

In dieser Aufgabe dürfen Sie die folgende Tabelle benutzen.

ϕ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin(\phi)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos(\phi)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

a) Berechnen Sie die kartesische Form der komplexen Zahl

$$z = \frac{100\mathrm{i}}{7-\mathrm{i}}.$$

Geben Sie ferner $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$ und $\overline{z}$ an.

Lösung: $z = -2 + 14\mathrm{i}$, $\mathrm{Re}(z) = -2$, $\mathrm{Im}(z) = 14$, $\overline{z} = -2 - 14\mathrm{i}$.

b) Seien

$$z_1 = e^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}, \quad z_2 = 2e^{\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}}$$

gegeben. Berechnen Sie $\frac{z_1^9}{z_2}$. Das Endergebnis soll in Polarform und in kartesischer Form angegeben werden.

Lösung: $\frac{z_1^9}{z_2} = \frac{1}{2}\exp\left(\frac{\pi}{4}\mathrm{i}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}\mathrm{i}$

c) Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$(z+1)^3 = -8$$

in kartesischer Form.

Lösung: $z_1 = -3, z_2 = \sqrt{3}\mathrm{i}, z_3 = -\sqrt{3}\mathrm{i}$

d) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort −1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr ☐ Falsch Wenn $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ eine Nullstelle des Polynoms $f(z) = z^{100} + z + 1$ ist, dann ist $\overline{z_0}$ ebenfalls eine Nullstelle von $f(z)$.

■ Wahr ☐ Falsch Die Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)\}$ ist eine Gerade in der Gaußschen Zahlenebene.

2. (7.0 Punkte)

a) Bestimmen Sie durch den Gauß-Algorithmus die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 11 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie ohne zusätzliche Rechnung $\mathrm{Rang}(\boldsymbol{A})$ und $\det(\boldsymbol{A})$ an.

Lösung: $L = \emptyset$, $\mathrm{Rang}(\boldsymbol{A}) = 2$, $\det(\boldsymbol{A}) = 0$.

b) Berechnen Sie die Determinante $\det(\boldsymbol{A})$ der Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

durch Laplace-Entwicklung.

Lösung: $\det(\boldsymbol{A}) = -2$.

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ■ Falsch Für alle $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{1\times 10}$ gilt $\boldsymbol{v}^T \cdot \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}$.

■ Wahr ☐ Falsch Wenn $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{100\times 100}$ eine Matrix mit $\mathrm{Rang}(\boldsymbol{A}) = 90$ ist, dann gilt $\dim(\mathrm{Kern}(\boldsymbol{A})) = 10$.

3. (10.0 Punkte)

a) Berechnen Sie die Inverse der Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung: $\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Berechnen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte der Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -10 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung: $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 2\lambda + 10$. Eigenwerte: $1 \pm 3\mathrm{i}$.

c) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

und zu jedem Eigenwert den zugehörigen Eigenraum.

Lösung: 5 ist einziger Eigenwert mit Eigenraum $\mathrm{Span}((1,0,0)^T, (0,1,0)^T)$.

d) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr ☐ Falsch Wenn $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine Matrix und $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ ein Eigenvektor von $\boldsymbol{A}$ ist, dann sind die Vektoren $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}$ linear abhängig.

■ Wahr ☐ Falsch Wenn $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{11\times 11}$ eine Matrix vom $\mathrm{Rang}(\boldsymbol{A}) = 7$ ist, dann ist $\lambda = 0$ ein Eigenwert von $\boldsymbol{A}$.

4. (15 Punkte)

a) Gegeben sind die Funktionen

$$\boldsymbol{f}\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}^2,\ f(t)=\begin{pmatrix} t^2\\ e^{-t}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{g}\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ \boldsymbol{g}(x_1,x_2)=\begin{pmatrix} x_1x_2\\ \sin(x_1)\end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, ob die Verkettungen $\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g}$ und $\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f}$ existieren. Falls ja, geben Sie jeweils die Funktionsvorschrift sowie die zugehörige Funktionalmatrix an.

Lösung: $(\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f})(t)=\begin{pmatrix} t^2e^{-t}\\ \sin(t^2)\end{pmatrix}$, $(\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f})'(t)=\begin{pmatrix} te^{-t}(2-t)\\ 2t\cos(t^2)\end{pmatrix}$, die Verkettung $\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g}$ existiert nicht.

b) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R},\quad f(x_1,x_2)=\frac{x_1x_2}{1+x_2}.$$

Berechnen Sie die maximale Steigung von f im Punkt $\boldsymbol{x}_0=(-1,1)$.

Lösung: $\operatorname{grad} f(x_1,x_2)=\begin{pmatrix} \frac{x_2}{1+x_2}\\ \frac{x_1}{(1+x_2)^2}\end{pmatrix} \implies \|\operatorname{grad} f(-1,1)\|=\frac{\sqrt{5}}{4}.$

c) Berechnen Sie alle stationären Punkte der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\quad f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2(\ln(x_2)-1)+e^{x_3^2(x_3+1)}.$$

Lösung: $\operatorname{grad} f(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix} 2x_1\\ \ln(x_2)\\ x_3(3x_3+2)e^{x_3^2(x_3+1)}\end{pmatrix}$

Stationäre Punkte:

$$\boldsymbol{x}_1=(0,1,0),\quad \boldsymbol{x}_2=(0,1,-\tfrac{2}{3})$$

d) Bestimmen Sie, ob der stationäre Punkt $\boldsymbol{x}_0=(-2\pi,\pi)$ der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad f(x_1,x_2)=\sin(x_1)\sin(x_2)$$

eine Maximalstelle, eine Minimalstelle oder eine Sattelstelle ist.

Lösung: $\boldsymbol{H}f(-1,\frac{1}{2})=\begin{pmatrix} 0 & -4\pi^2\\ -4\pi^2 & 0\end{pmatrix} \implies \det \boldsymbol{H}f(-1,\frac{1}{2})<0 \implies \boldsymbol{x}_0$ ist Sattelstelle.

e) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr ☐ Falsch Der Punkt $(1,3)$ liegt auf dem Rand der Menge $[0,2]\times[3,4]$.

■ Wahr ☐ Falsch Wenn eine Funktion $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ in $\boldsymbol{x}_0$ differenzierbar ist, dann ist f in $\boldsymbol{x}_0$ auch partiell differenzierbar.

5. (16.5 Punkte)

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 \int_{\frac{1}{2}}^1 e^{-x} \cos(\pi y)\, dy\, dx.$$

Lösung: $\int_0^1 \int_{\frac{1}{2}}^1 e^{-x} \cos(\pi y)\, dy\, dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{e} - 1\right)$

b) Skizzieren Sie den Normalbereich

$$U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq 9,\; x \leq 0\right\}$$

und berechnen Sie das Integral

$$\iint_U \sqrt{x^2+y^2}\, d(x,y)$$

mit Polarkoordinaten.

Lösung: U ist die linke Hälfte der Einheitsphäre. $\iint_U \sqrt{x^2+y^2}\, d(x,y) = 9\pi$

c) Berechnen Sie den Oberflächeninhalt $|S|$ des Graphen der Funktion

$$f\colon D \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = 4 - 3x + \sqrt{6}\, y,$$

wobei D das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(2,1)$ und $(2,-2)$ ist.

Lösung:

$$|S| = \int_{-1}^1 \int_{-x-1}^{\frac{1}{2}(x+1)} \sqrt{1 + (-3)^2 + (\sqrt{6})^2}\, dy\, dx = 9$$

d) Die Transformation $\boldsymbol{T}\colon U^* \to U$ mit

$$\boldsymbol{T}(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} \xi - \eta \\ 2\xi + \eta \end{pmatrix}$$

bildet das Einheitsdreieck

$$U^* = \left\{(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \xi \leq 1,\; 0 \leq \eta \leq 1 - \xi\right\}$$

auf das Dreieck U mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,2)$ und $(-1,1)$ ab.

Wenden Sie den Transformationssatz mit der Transformation $\boldsymbol{T}$ auf das Integral

$$\iint_U (x+y)\, d(x,y)$$

an. Das Integral selbst soll nicht berechnet werden!

Lösung: $\iint_U (x+y)\,d(x,y) = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} (\xi - \eta + 2\xi + \eta) \cdot 3\,d\eta\,d\xi = \frac{3}{2}$

e) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ■ Falsch Ist ein Integrationsgebiet $U \subset \mathbb{R}^2$ ein Normalbereich bezüglich x, dann kann U kein Normalbereich bezüglich y sein.

■ Wahr ☐ Falsch Für jede stetige Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy.$$