Klausur zu Höhere Mathematik II BNUW WiSe 2024/2025

Gesamtzahl der Aufgaben: 6, Gesamtpunktzahl: 60, Bearbeitungszeit: 120 Minuten

1. (9 Punkte)

   a) Gegeben sind die komplexen Zahlen

   $$z_1 = \frac{\overline{\mathrm{i}-2}+2}{2-\mathrm{i}}, \quad z_2 = \left(e^{\frac{5\pi}{6}\mathrm{i}}\right)^3.$$

      i) Berechnen Sie z_1 in kartesischer Form.

      ii) Berechnen Sie z_2 in Polarform.

   Lösung:
   $z_1 = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}\mathrm{i}$, $z_2 = e^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}$

   b) Bestimmen Sie die Linearfaktorzerlegung von

   $$f(z) = 4z^3 + 5z^2 + 4z + 5.$$

   Hinweis: $z_0 = \mathrm{i}$ ist eine Nullstelle von f.

   Lösung: $f(z) = 4(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})(z+\frac{5}{4})$

   c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

   Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

   ☐ Wahr ■ Falsch Für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ gilt

   $$\mathrm{Re}(z) = z - \mathrm{Im}(z).$$

   ☐ Wahr ■ Falsch Die n-ten Einheitswurzeln sind die n verschiedenen Lösungen von $z^n = -1$.

2. (9 Punkte)

a) Bestimmen Sie durch den Gauß-Algorithmus die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 6x_1 + 8x_2 + 3x_3 &= 0\,. \end{aligned}$$

Lösung: $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

b) Zeigen Sie, dass die folgenden Vektoren linear abhängig sind, indem Sie eine konkrete Linearkombination $\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$ angeben mit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0, 0, 0)$.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung: Eine mögliche Lösung ist $\lambda_1 = -7,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2$.

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ■ Falsch Zwei Vektoren $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{R}^3$ sind genau dann linear abhängig, wenn Sie in einer Ebene liegen.

■ Wahr ☐ Falsch Sind zwei Lösungen $\boldsymbol{x}_1$ und $\boldsymbol{x}_2$ des Gleichungssystems $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ gegeben, so ist $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2$ eine Lösung von $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$.

3. (11 Punkte)

a) Lösen Sie die folgende Matrixgleichung formal nach $\boldsymbol{X}$ auf. Dabei können Sie davon ausgehen, dass alle auftretenden Matrizen regulär sind.

$$\boldsymbol{X}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{C} + \boldsymbol{D}.$$

Lösung: $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D})(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{C})^{-1}$

b) Berechnen Sie die Inverse $\boldsymbol{A}^{-1}$ von

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Lösung: $\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) Untersuchen Sie, für welche Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ die Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha^2 & 2 \end{pmatrix}$$

regulär ist.

Lösung: $\boldsymbol{A}$ ist regulär für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$

d) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr ☐ Falsch Ist eine Matrix singulär, so besitzt sie keine Inverse.

■ Wahr ☐ Falsch Gilt $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ für einen Vektor $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, so ist $\boldsymbol{x}$ ein Eigenvektor von $\boldsymbol{A}$ zum Eigenwert $\lambda = 0$.

☐ Wahr ■ Falsch Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda \\ 0 & -2 & -\lambda \end{pmatrix} = 1 - \lambda \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda \\ -2 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

4. (15 Punkte)

a) Berechnen Sie die Funktionalmatrix von

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = e^{x_1 x_2} + x_1\,.$$

Lösung: $\boldsymbol{f}'(x_1, x_2) = \left(x_2 e^{x_1 x_2} + 1, \quad x_1 e^{x_1 x_2}\right)$

b) Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = (2x_1 - 1)\cos(x_2)\,.$$

Berechnen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades von f um den Entwicklungspunkt $\boldsymbol{x}_0 = \mathbf{0}$.

Lösung: $T_2(\boldsymbol{x}; \mathbf{0}) = -1 + 2x_1 + \frac{1}{2}x_2^2$.

c) Bestimmen Sie alle stationären Stellen der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 + x_1 + 5x_2.$$

Lösung: Einzige stationäre Stelle ist $\boldsymbol{x} = (1, -3)$.

d) Die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = e^{x_1} - x_1 e^{x_2}$$

hat die stationäre Stelle $\boldsymbol{x}_0 = (0, 0)$. Untersuchen Sie, ob es sich bei $\boldsymbol{x}_0$ um eine Maximal-, Minimal- oder Sattelstelle handelt.

Lösung: $\boldsymbol{x}_0$ ist eine Sattelstelle.

e) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr ☐ Falsch Für den Gradient einer reellwertigen Funktion f gilt stets

$$\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}) = \nabla f(\boldsymbol{x})\,.$$

☐ Wahr ■ Falsch Die Richtungsableitung einer Funktion $\boldsymbol{f}$ an einer Stelle $\boldsymbol{x}_0$ in Richtung eines Einheitsvektors $\boldsymbol{a}$ ist gegeben durch

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a} + h\boldsymbol{x}_0) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})}{h}\,.$$

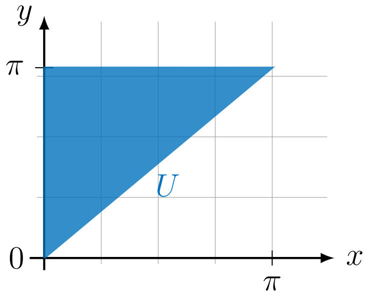
5. (10 Punkte)

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^{\pi} \int_0^{y} \cos(x+y)\, dx\, dy$$

und skizzieren Sie das zugehörige Integrationsgebiet.

Lösung: $\displaystyle\int_0^{\pi} \int_0^{y} \cos(x+y)\, dx\, dy = -2$



b) Berechnen Sie mit Polarkoordinaten das Integral

$$\iint_U x + x^2 + y^2\, dx\, dy,$$

wobei $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Lösung: $\displaystyle\iint_U x + x^2 + y^2\, dx\, dy = \frac{\pi}{2}$

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort −1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ■ Falsch Ist $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige stetige Funktion, so gilt

$$\int_0^{2} \int_0^{3} h(y)\, dx\, dy = 2 \int_0^{3} h(y)\, dy\,.$$

☐ Wahr ■ Falsch Ist $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine beliebige stetige Funktion, so gilt

$$\int_0^{2} \int_0^{y} f(x,y)\, dx\, dy = \int_0^{y} \int_0^{2} f(x,y)\, dy\, dx\,.$$

6. (6 Punkte)

a) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = 2y + e^x, \ y(0) = 1 \, .$$

Lösung: $y(x) = -e^x + 2e^{2x}$.

b) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'' + 9y = 0, \ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2, \ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 9 \, .$$

Lösung: $y(x) = -2\sin(3x) + 3\cos(3x)$.