

Nachname:

Vorname:

Matrikelnummer:

**Klausur zu  
Höhere Mathematik II  
Maschinenbau  
WiSe 2024/2025**

**Gesamtzahl der Aufgaben: 5,      Gesamtpunktzahl: 60,      Bearbeitungszeit: 120 Minuten**

1. (9 Punkte)

a) Gegeben sind die komplexen Zahlen

$$z_1 = \frac{\overline{i-2} + 2}{2-i}, \quad z_2 = \left(e^{\frac{5\pi}{6}i}\right)^3.$$

i) Berechnen Sie  $z_1$  in kartesischer Form.

ii) Berechnen Sie  $z_2$  in Polarform.

b) Bestimmen Sie die Linearfaktorzerlegung von

$$f(z) = 4z^3 + 5z^2 + 4z + 5.$$

*Hinweis:*  $z_0 = i$  ist eine Nullstelle von  $f$ .

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Wahr    Falsch   Für jede komplexe Zahl  $z \in \mathbb{C}$  gilt

$$\operatorname{Re}(z) = z - \operatorname{Im}(z).$$

Wahr    Falsch   Die  $n$ -ten Einheitswurzeln sind die  $n$  verschiedenen Lösungen von  $z^n = -1$ .

2. (9 Punkte)

a) Bestimmen Sie durch den Gauß-Algorithmus die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 6x_1 + 8x_2 + 3x_3 &= 0. \end{aligned}$$

- b) Zeigen Sie, dass die folgenden Vektoren linear abhängig sind, indem Sie eine konkrete Linearkombination  $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$  angeben mit  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0, 0, 0)$ .

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Wahr  Falsch Zwei Vektoren  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$  sind genau dann linear abhängig, wenn Sie in einer Ebene liegen.

Wahr  Falsch Sind zwei Lösungen  $\mathbf{x}_1$  und  $\mathbf{x}_2$  des Gleichungssystems  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  gegeben, so ist  $\mathbf{y} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$  eine Lösung von  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

3. (11 Punkte)

- a) Lösen Sie die folgende Matrixgleichung formal nach  $\mathbf{X}$  auf. Dabei können Sie davon ausgehen, dass alle auftretenden Matrizen regulär sind.

$$\mathbf{X}\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{X}\mathbf{C} + \mathbf{D}.$$

- b) Berechnen Sie die Inverse  $\mathbf{A}^{-1}$  von

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- c) Untersuchen Sie, für welche Parameter  $\alpha \in \mathbb{R}$  die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha^2 & 2 \end{pmatrix}$$

regulär ist.

- d) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Wahr  Falsch Ist eine Matrix singulär, so besitzt sie keine Inverse.

Wahr  Falsch Gilt  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  für einen Vektor  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , so ist  $\mathbf{x}$  ein Eigenvektor von  $\mathbf{A}$  zum Eigenwert  $\lambda = 0$ .

Wahr  Falsch Für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & \lambda \\ 0 & -2 & -\lambda \end{pmatrix} = 1 - \lambda \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & \lambda \\ -2 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

4. (15 Punkte)

a) Berechnen Sie die Funktionalmatrix von

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = e^{x_1 x_2} + x_1.$$

b) Gegeben ist die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = (2x_1 - 1) \cos(x_2).$$

Berechnen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades von  $f$  um den Entwicklungspunkt  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ .

c) Bestimmen Sie alle stationären Stellen der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 + x_1 + 5x_2.$$

d) Die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = e^{x_1} - x_1 e^{x_2}$$

hat die stationäre Stelle  $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$ . Untersuchen Sie, ob es sich bei  $\mathbf{x}_0$  um eine Maximal-, Minimal- oder Sattelstelle handelt.

e) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Wahr  Falsch Für den Gradient einer reellwertigen Funktion  $f$  gilt stets

$$\text{grad } f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}).$$

Wahr  Falsch Die Richtungsableitung einer Funktion  $\mathbf{f}$  an einer Stelle  $\mathbf{x}_0$  in Richtung eines Einheitsvektors  $\mathbf{a}$  ist gegeben durch

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{a}}(\mathbf{x}_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{a} + h\mathbf{x}_0) - \mathbf{f}(\mathbf{a})}{h}.$$

5. (16 Punkte)

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^\pi \int_0^y \cos(x + y) \, dx \, dy$$

und skizzieren Sie das zugehörige Integrationsgebiet.

b) Berechnen Sie mit Polarkoordinaten das Integral

$$\iint_U x + x^2 + y^2 \, dx \, dy,$$

wobei  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

c) Berechnen Sie mit Hilfe von Kugelkoordinaten das Volumen der Viertelkugel

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, y \geq 0, z \geq 0\} .$$

d) Berechnen Sie den Oberflächeninhalt des Graphen der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = 2x + 2y$$

über dem Definitionsbereich

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 4, 0 \leq x \leq \sqrt{y}\} .$$

e) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Wahr  Falsch Ist  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine beliebige stetige Funktion, so gilt

$$\int_0^2 \int_0^3 h(y) dx dy = 2 \int_0^3 h(y) dy .$$

Wahr  Falsch Ist  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  eine beliebige stetige Funktion, so gilt

$$\int_0^2 \int_0^y f(x, y) dx dy = \int_0^y \int_0^2 f(x, y) dy dx .$$