

**Klausur zu
Höhere Mathematik II
Maschinenbau
WiSe 2024/2025**

Gesamtzahl der Aufgaben: 5, Gesamtpunktzahl: 60, Bearbeitungszeit: 120 Minuten

1. (9 Punkte)

a) Gegeben sind die komplexen Zahlen

$$z_1 = \frac{\overline{i-2} + 2}{2-i}, \quad z_2 = \left(e^{\frac{5\pi}{6}i}\right)^3.$$

i) Berechnen Sie z_1 in kartesischer Form.

ii) Berechnen Sie z_2 in Polarform.

Lösung:

$$z_1 = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i, \quad z_2 = e^{\frac{\pi}{2}i}$$

b) Bestimmen Sie die Linearfaktorzerlegung von

$$f(z) = 4z^3 + 5z^2 + 4z + 5.$$

Hinweis: $z_0 = i$ ist eine Nullstelle von f .

Lösung: $f(z) = 4(z-i)(z+i)(z+\frac{5}{4})$

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☒ Falsch Für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\operatorname{Re}(z) = z - \operatorname{Im}(z).$$

☐ Wahr ☒ Falsch Die n -ten Einheitswurzeln sind die n verschiedenen Lösungen von $z^n = -1$.

2. (9 Punkte)

a) Bestimmen Sie durch den Gauß-Algorithmus die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\4x_1 + 7x_2 + 3x_3 &= 1 \\6x_1 + 8x_2 + 3x_3 &= 0.\end{aligned}$$

Lösung: $x = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

b) Zeigen Sie, dass die folgenden Vektoren linear abhängig sind, indem Sie eine konkrete Linearkombination $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ angeben mit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0, 0, 0)$.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung: Eine mögliche Lösung ist $\lambda_1 = -7$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$.

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☒ Falsch Zwei Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$ sind genau dann linear abhängig, wenn Sie in einer Ebene liegen.

☒ Wahr ☐ Falsch Sind zwei Lösungen $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ des Gleichungssystems $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ gegeben, so ist $\mathbf{y} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ eine Lösung von $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

3. (11 Punkte)

- a) Lösen Sie die folgende Matrixgleichung formal nach $\mathbf{X}$ auf. Dabei können Sie davon ausgehen, dass alle auftretenden Matrizen regulär sind.

$$\mathbf{X}\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{X}\mathbf{C} + \mathbf{D}.$$

Lösung: $\mathbf{X} = (\mathbf{B} + \mathbf{D})(\mathbf{A} - \mathbf{C})^{-1}$

- b) Berechnen Sie die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$ von

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Lösung: $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- c) Untersuchen Sie, für welche Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha^2 & 2 \end{pmatrix}$$

regulär ist.

Lösung: $\mathbf{A}$ ist regulär für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$

- d) Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr □ Falsch Ist eine Matrix singulär, so besitzt sie keine Inverse.

■ Wahr □ Falsch Gilt $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ für einen Vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, so ist $\mathbf{x}$ ein Eigenvektor von $\mathbf{A}$ zum Eigenwert $\lambda = 0$.

□ Wahr ■ Falsch Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda \\ 0 & -2 & -\lambda \end{pmatrix} = 1 - \lambda \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda \\ -2 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

4. (15 Punkte)

a) Berechnen Sie die Funktionalmatrix von

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = e^{x_1 x_2} + x_1.$$

Lösung: $f'(x_1, x_2) = (x_2 e^{x_1 x_2} + 1, \quad x_1 e^{x_1 x_2})$

b) Gegeben ist die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = (2x_1 - 1) \cos(x_2).$$

Berechnen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades von f um den Entwicklungspunkt $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$.

Lösung: $T_2(\mathbf{x}; \mathbf{0}) = -1 + 2x_1 + \frac{1}{2}x_2^2.$

c) Bestimmen Sie alle stationären Stellen der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 + x_1 + 5x_2.$$

Lösung: Einzige stationäre Stelle ist $\mathbf{x} = (1, -3).$

d) Die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = e^{x_1} - x_1 e^{x_2}$$

hat die stationäre Stelle $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$. Untersuchen Sie, ob es sich bei $\mathbf{x}_0$ um eine Maximal-, Minimal- oder Sattelstelle handelt.

Lösung: $\mathbf{x}_0$ ist eine Sattelstelle.

e) Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☒ Wahr ☐ Falsch Für den Gradient einer reellwertigen Funktion f gilt stets

$$\text{grad } f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}).$$

☐ Wahr ☒ Falsch Die Richtungsableitung einer Funktion f an einer Stelle $\mathbf{x}_0$ in Richtung eines Einheitsvektors $\mathbf{a}$ ist gegeben durch

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}}(\mathbf{x}_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{x}_0) - f(\mathbf{a})}{h}.$$

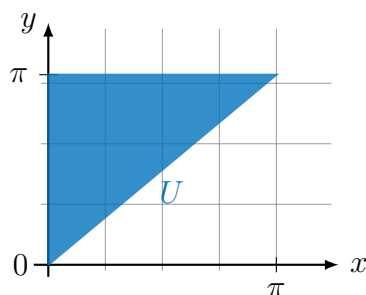
5. (16 Punkte)

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^\pi \int_0^y \cos(x+y) \, dx \, dy$$

und skizzieren Sie das zugehörige Integrationsgebiet.

Lösung: $\int_0^\pi \int_0^y \cos(x+y) \, dx \, dy = -2$



b) Berechnen Sie mit Polarkoordinaten das Integral

$$\iint_U x + x^2 + y^2 \, dx \, dy,$$

wobei $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Lösung: $\iint_U x + x^2 + y^2 \, dx \, dy = \frac{\pi}{2}$

c) Berechnen Sie mit Hilfe von Kugelkoordinaten das Volumen der Viertelkugel

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, y \geq 0, z \geq 0\}.$$

Lösung: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\pi \int_0^1 r^2 \sin(\theta) \, dr \, d\varphi \, d\theta = \frac{\pi}{3}.$

d) Berechnen Sie den Oberflächeninhalt des Graphen der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = 2x + 2y$$

über dem Definitionsbereich

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 4, 0 \leq x \leq \sqrt{y}\}.$$

Lösung: $|S| = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{y}} \sqrt{1 + 2^2 + 2^2} dx dy = 16.$

- e) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☒ Falsch Ist $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige stetige Funktion, so gilt

$$\int_0^2 \int_0^3 h(y) dx dy = 2 \int_0^3 h(y) dy.$$

☐ Wahr ☒ Falsch Ist $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige stetige Funktion, so gilt

$$\int_0^2 \int_0^y f(x, y) dx dy = \int_0^y \int_0^2 f(x, y) dy dx.$$