

Klausur zu
Höhere Mathematik III
WiSe 2021

Gesamtzahl der Aufgaben: 6, Gesamtpunktzahl: 60, Bearbeitungszeit: 120 Minuten

1. (11 Punkte)

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{2}{x}y + 1, \quad y(1) = 2$$

mit der Formel für inhomogene lineare Differentialgleichungen erster Ordnung.

Lösung: $y(x) = 3x^2 - x$

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{1}{(x + y + 1)^2} - 1, \quad y(1) = 0$$

Lösung: $y(x) = \sqrt[3]{3x + 5} - x - 1$
--

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Wahr Falsch Eine Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ hat stets eine eindeutige Lösung.

Wahr Falsch Die Differentialgleichung $y' = e^{x+y}$ kann als Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen geschrieben werden.

2. (10 Punkte)

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Lösung: $\mathbf{y}(x) = - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3x} - 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-x}$

b) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

- Wahr Falsch Ein Fundamentalsystem von $\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}$ mit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sind n linear unabhängige Lösungen.

- Wahr Falsch Sind \mathbf{y}_1 und \mathbf{y}_2 Lösungen von $\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}$, dann ist auch $\mathbf{y}(x) = 2\mathbf{y}_1 - 3\mathbf{y}_2$ eine Lösung.

3. (10 Punkte)

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

Lösung: $y(x) = c_1 e^{-x} \cos(2x) + c_2 e^{-x} \sin(2x)$

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + 6y' + 9y = 9x$$

mit Hilfe eines geeigneten Ansatzes für die partikuläre Lösung.

Lösung: $y(x) = x - \frac{2}{3} + c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x}$

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Wahr Falsch Die Differentialgleichung $y'' + x^2 y' - y = x$ ist linear.

Wahr Falsch Das Anfangswertproblem $y'' - y = 0$ mit $y'(0) = 1$ ist eindeutig lösbar.

4. (9 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}[y]$ der Lösung des Anfangswertproblems

$$y'' - 2y' + y = \sin(2t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Lösung: $\mathcal{L}[y] = \frac{1}{(z-1)^2} \left(\frac{2}{z^2+4} + z - 2 \right)$

b) Gegeben ist die Laplace-Transformierte

$$\mathcal{L}[y] = \frac{z+3}{z^2+2z+1}.$$

Bestimmen Sie die Originalfunktion y .

Lösung: $y(t) = e^{-t} + 2te^{-t}$

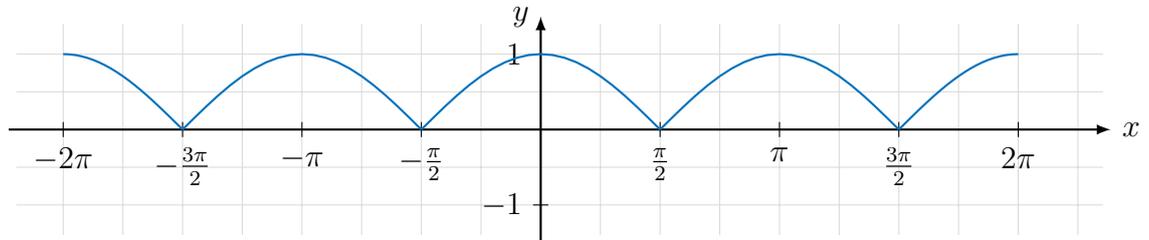
5. (12 Punkte)

a) Gegeben ist die π -periodische Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \cos(x), \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

und $f(x + \pi) = f(x)$ für $x \in \mathbb{R}$.

i) Skizzieren Sie den Graph von f im Intervall $[-2\pi, 2\pi]$ im folgenden Koordinatensystem.



ii) Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten a_0 und a_1 der Fourier-Reihe von f .

Hinweis: Es gilt $\cos(x) \cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$.

Lösung: $a_0 = \frac{4}{\pi}, a_1 = \frac{4}{3\pi}$

b) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangsrandwertproblems

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, & (x, t) &\in (0, 2) \times \mathbb{R}^+, \\ u(0, t) &= u(2, t) = 0, & t &\geq 0, \\ u(x, 0) &= \sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right) - 2 \sin(3\pi x), & 0 < x < 2. \end{aligned}$$

Lösung: $u(x, t) = \sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right)e^{-\frac{9}{4}\pi^2 t} - 2 \sin(3\pi x)e^{-9\pi^2 t}$

c) Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Wahr Falsch Die Wärmeleitungsgleichung ist hyperbolisch.

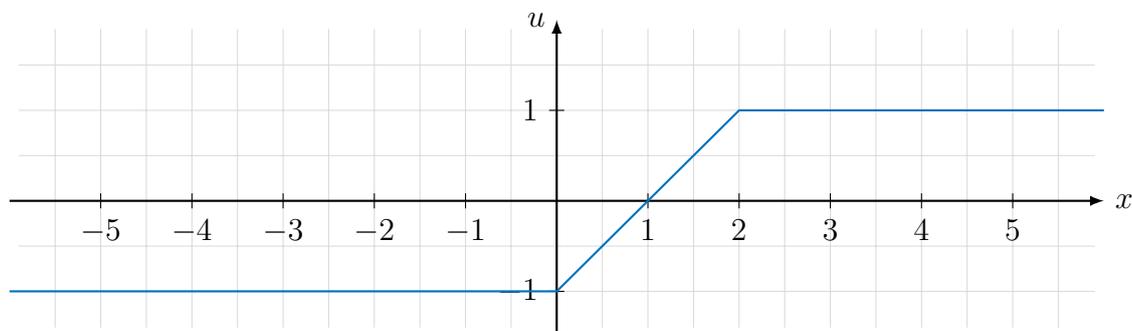
Wahr Falsch Die Fourier-Reihe einer ungeraden periodischen Funktion ist eine reine Sinusreihe.

6. (8 Punkte)

a) Gegeben ist die Funktion

$$u_0(x) = \begin{cases} -1, & x \leq 0, \\ x - 1, & 0 < x < 2, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

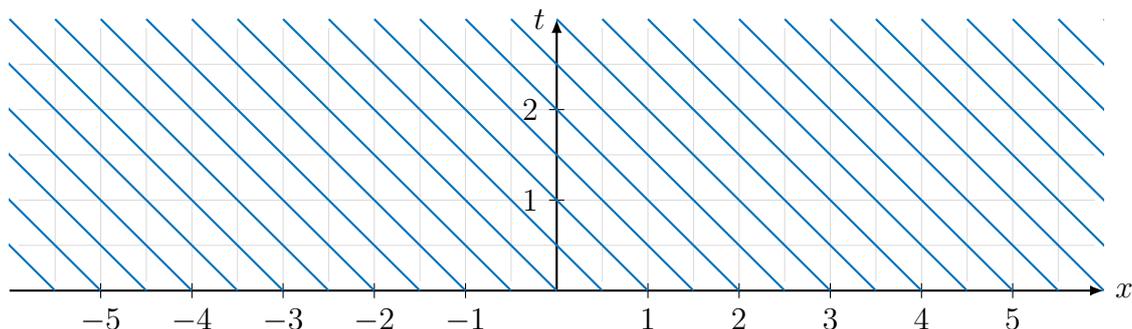
i) Zeichnen Sie den Graph von u_0 in das folgende Koordinatensystem.



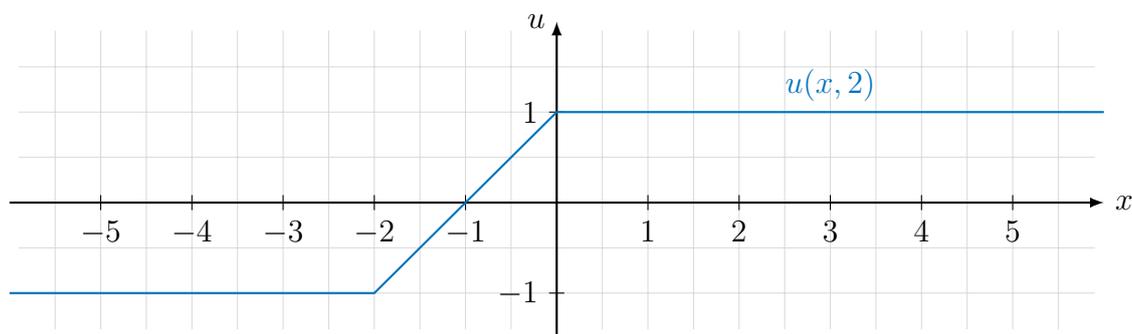
ii) Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$u_t - u_x = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x).$$

Skizzieren Sie die zugehörigen Charakteristiken im folgenden Koordinatensystem .



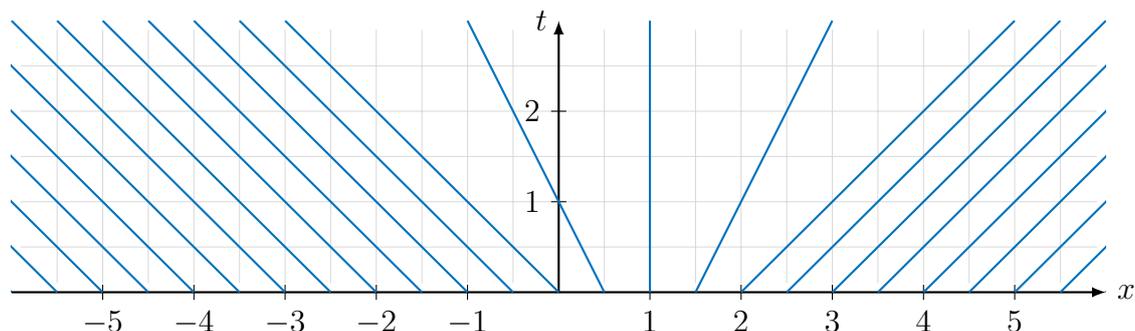
Zeichnen Sie die Lösung zur Zeit $t = 2$ in das folgende Koordinatensystem.



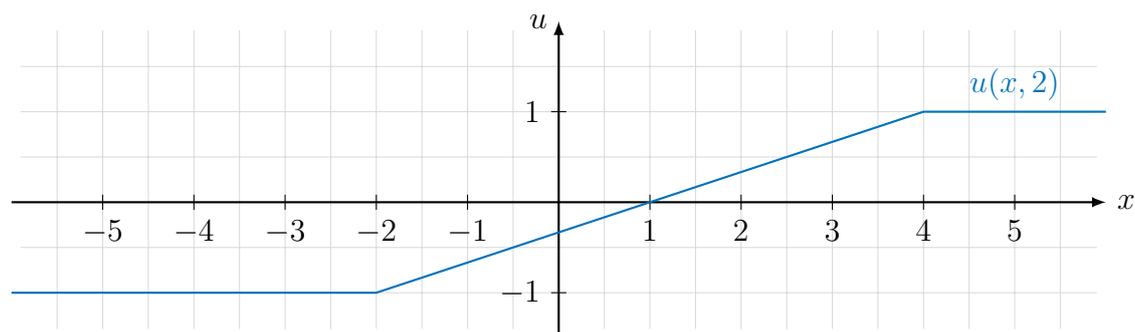
iii) Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$u_t + uu_x = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x).$$

Skizzieren Sie die zugehörigen Charakteristiken im folgenden Koordinatensystem.



Zeichnen Sie die Lösung zur Zeit $t = 2$ in das folgende Koordinatensystem.



- b) Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

- Wahr Falsch Die Charakteristiken einer linearen Transportgleichung können sich nicht schneiden.
- Wahr Falsch Bei der Burgers-Gleichung gilt $s = u_L + u_R$ für die Geschwindigkeit einer Sprungunstetigkeit, wobei u_L und u_R die links- und rechtsseitigen Werte an der Unstetigkeitsstelle bezeichnen.