Nachname:	
Vorname:	
Matrikelnummer:	

Klausur zu Höhere Mathematik III WiSe 2021

Gesamtzahl der Aufgaben: 6, Gesamtpunktzahl: 60, Bearbeitungszeit: 120 Minuten

1. (11 Punkte)

   a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

   $$y' = \frac{2}{x}y + 1, \quad y(1) = 2$$

   mit der Formel für inhomogene lineare Differentialgleichungen erster Ordnung.

   b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

   $$y' = \frac{1}{(x+y+1)^2} - 1, \quad y(1) = 0$$

   c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

   Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

   ☐ Wahr ☐ Falsch Eine Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ hat stets eine eindeutige Lösung.

   ☐ Wahr ☐ Falsch Die Differentialgleichung $y' = e^{x+y}$ kann als Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen geschrieben werden.

2. (10 Punkte)

   a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

   $$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{y}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

   b) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

   Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

   ☐ Wahr ☐ Falsch Ein Fundamentalsystem von $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$ mit $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sind n linear unabhängige Lösungen.

   ☐ Wahr ☐ Falsch Sind $\boldsymbol{y}_1$ und $\boldsymbol{y}_2$ Lösungen von $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$, dann ist auch $\boldsymbol{y}(x) = 2\boldsymbol{y}_1 - 3\boldsymbol{y}_2$ eine Lösung.

3. (10 Punkte)

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + 6y' + 9y = 9x$$

mit Hilfe eines geeigneten Ansatzes für die partikuläre Lösung.

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☐ Falsch Die Differentialgleichung $y'' + x^2y' - y = x$ ist linear.

☐ Wahr ☐ Falsch Das Anfangswertproblem $y'' - y = 0$ mit $y'(0) = 1$ ist eindeutig lösbar.

4. (9 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte $\mathscr{L}[y]$ der Lösung des Anfangswertproblems

$$y'' - 2y' + y = \sin(2t), \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

b) Gegeben ist die Laplace-Transformierte

$$\mathscr{L}[y] = \frac{z+3}{z^2+2z+1}.$$

Bestimmen Sie die Originalfunktion y.

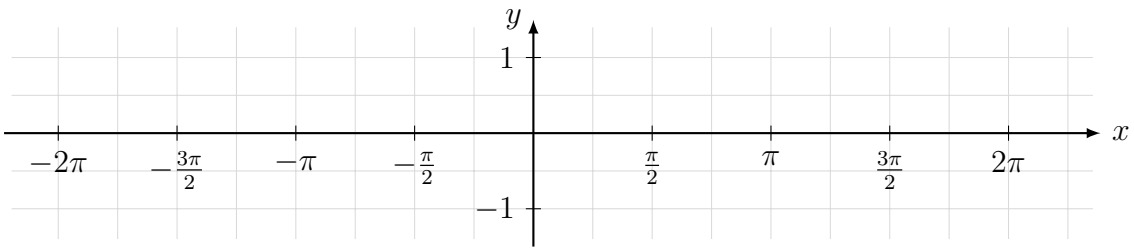
5. (12 Punkte)

a) Gegeben ist die π-periodische Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \cos(x), \quad x \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$

und $f(x+\pi) = f(x)$ für $x \in \mathbb{R}$.

i) Skizzieren Sie den Graph von f im Intervall $[-2\pi, 2\pi]$ im folgenden Koordinatensystem.



ii) Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten a_0 und a_1 der Fourier-Reihe von f.

Hinweis: Es gilt $\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\big(\cos(x+y) + \cos(x-y)\big)$.

b) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangsrandwertproblems

$$\begin{aligned} &u_t = u_{xx}, && (x,t) \in (0,2) \times \mathbb{R}^+, \\ &u(0,t) = u(2,t) = 0, && t \geq 0, \\ &u(x,0) = \sin(\tfrac{3\pi x}{2}) - 2\sin(3\pi x), && 0 < x < 2. \end{aligned}$$

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☐ Falsch Die Wärmeleitungsgleichung ist hyperbolisch.

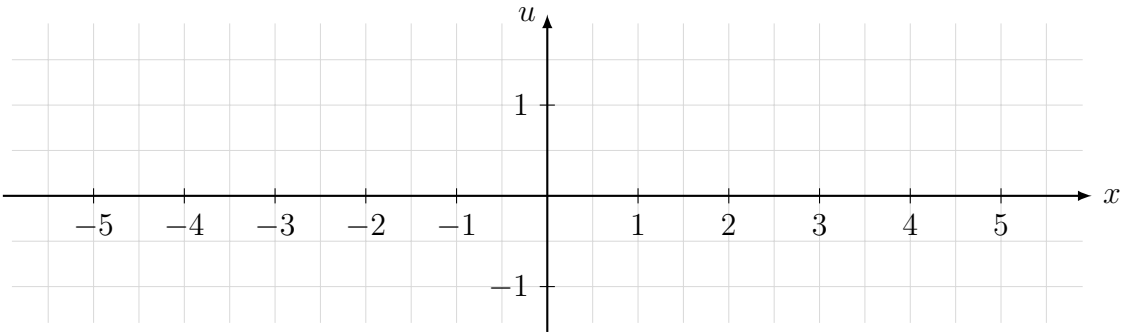
☐ Wahr ☐ Falsch Die Fourier-Reihe einer ungeraden periodischen Funktion ist eine reine Sinusreihe.

6. (8 Punkte)

a) Gegeben ist die Funktion

$$u_0(x) = \begin{cases} -1, & x \leq 0, \\ x - 1, & 0 < x < 2, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

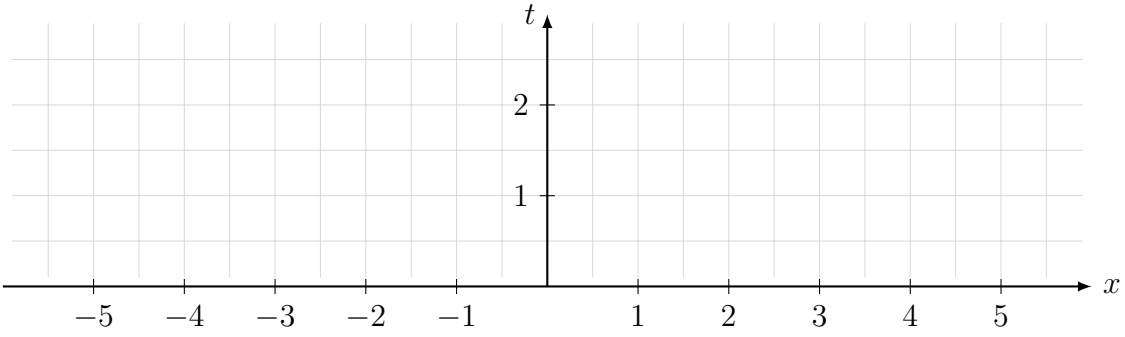
i) Zeichnen Sie den Graph von u_0 in das folgende Koordinatensystem.



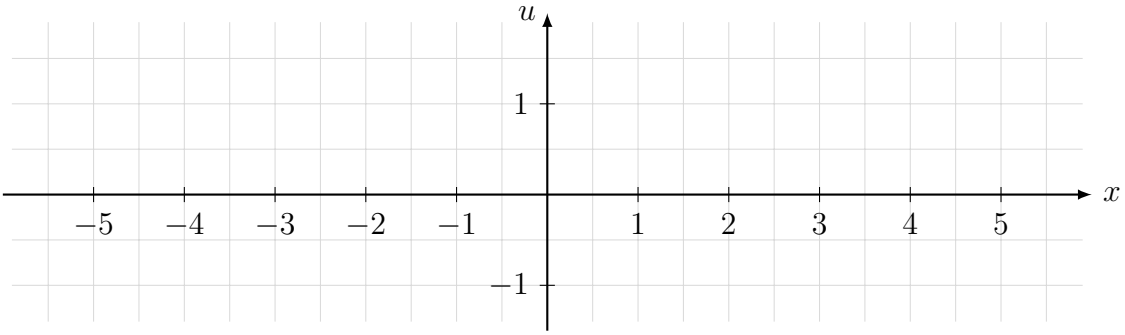
ii) Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$u_t - u_x = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x).$$

Skizzieren Sie die zugehörigen Charakteristiken im folgenden Koordinatensystem .



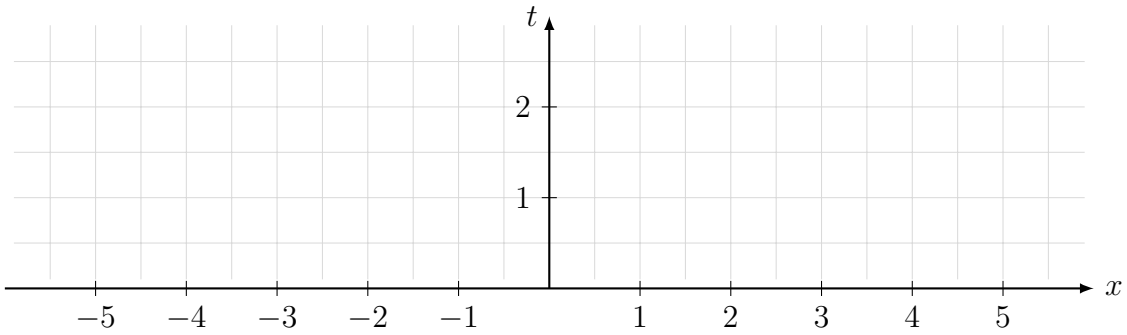
Zeichnen Sie die Lösung zur Zeit $t = 2$ in das folgende Koordinatensystem.



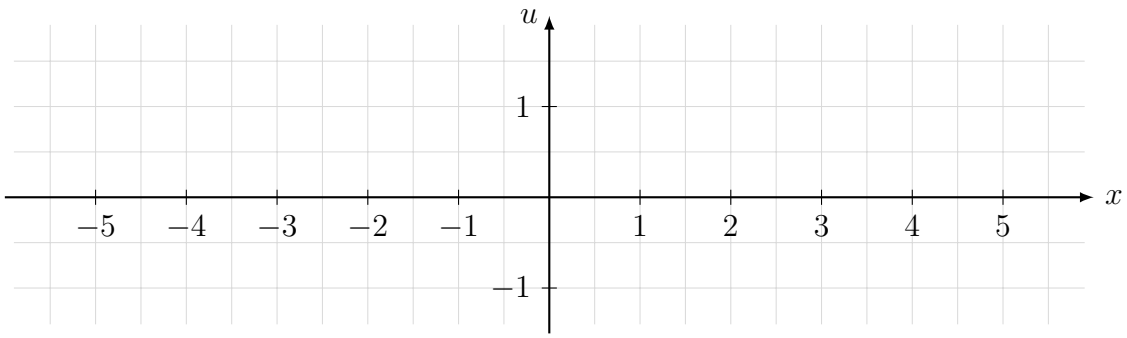
iii) Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$u_t + uu_x = 0, \quad u(x,0) = u_0(x).$$

Skizzieren Sie die zugehörigen Charakteristiken im folgenden Koordinatensystem.



Zeichnen Sie die Lösung zur Zeit $t = 2$ in das folgende Koordinatensystem.



b) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☐ Falsch Die Charakteristiken einer linearen Transportgleichung können sich nicht schneiden.

☐ Wahr ☐ Falsch Bei der Burgers-Gleichung gilt $s = u_L + u_R$ für die Geschwindigkeit einer Sprungunstetigkeit, wobei u_L und u_R die links- und rechtsseitigen Werte an der Unstetigkeitsstelle bezeichnen.