Klausur zu
Höhere Mathematik III
SoSe 2022

Gesamtzahl der Aufgaben: 6, Gesamtpunktzahl: 60, Bearbeitungszeit: 120 Minuten

1. (10.5 Punkte)

a) Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y' = -\frac{1}{3}x(y-1)^2.$$

Lösung: $y(x) = 1 + \dfrac{6}{x^2 - 6c}$, $c \in \mathbb{R}$ und $y(x) = 1$.

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = -y + xy^2, \quad y(0) = 2.$$

Lösung: $y(x) = \dfrac{1}{1 + x - \frac{1}{2}e^x}$

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr ☐ Falsch Die Differentialgleichung $y' = x^2y + 1$ ist linear.

■ Wahr ☐ Falsch Die Differentialgleichung $y' = x^2y + 1$ ist von erster Ordnung.

2. (8 Punkte)

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'' = -\frac{2}{y^5}, \quad y(1) = 1,\ y'(1) = 1.$$

Lösung: $y(x) = \sqrt[3]{3x-2}$

b) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ■ Falsch Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'' + y = 0$ hat die Form $y(x) = \sin(x) + \cos(x)$.

■ Wahr ☐ Falsch Die Funktion $y(x) = e^x$ ist eine Lösung der linearen Differentialgleichung $(1+x)^2 y'' - (x^2+1)y' - 2xy = 0$.

3. (11 Punkte)

a) Wir betrachten das inhomogene lineare System

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{x} & \frac{x+1}{x} \end{pmatrix} \boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ xe^x \end{pmatrix}, \quad x > 0.$$

i) Zeigen Sie, dass

$$\boldsymbol{y}_1(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y}_2(x) = \begin{pmatrix} x+1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem des zugehörigen homogenen linearen Systems bilden.

Lösung:

- $\boldsymbol{y}_1' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{x} & \frac{x+1}{x} \end{pmatrix} \boldsymbol{y}_1$
- $\boldsymbol{y}_2' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{x} & \frac{x+1}{x} \end{pmatrix} \boldsymbol{y}_2,$
- $\det(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2) = -xe^x < 0$

ii) Berechnen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems.

Lösung: $\boldsymbol{y}(x) = c_1 \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x+1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} e^x \begin{pmatrix} x^2 - 2 \\ x^2 + 2x - 2 \end{pmatrix}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

b) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort −1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr ☐ Falsch Eine skalare lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung kann in ein äquivalentes lineares Systems erster Ordnung umgeschrieben werden.

☐ Wahr ■ Falsch Sind $\boldsymbol{y}_1$ und $\boldsymbol{y}_2$ Lösungen des inhomogenen Systems $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(x)$, dann ist auch $\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2$ eine Lösung dieses Systems.

4. (9 Punkte) Wir betrachten die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$y''' - 2y' - 4y = \cos(3t)$$

a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

> **Lösung:** $y_1(x) = e^{2x}$, $y_2(x) = e^{-x}\sin(x)$, $y_3(x) = e^{-x}\cos(x)$

b) Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte $\mathscr{L}[y]$ der Lösung der inhomgenen Differentialgleichung mit den zusätzlichen Anfangsbedingungen

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 0.$$

> **Lösung:** $\mathscr{L}[y] = \dfrac{1}{z^3 - 2z - 4}\left(z + \dfrac{z}{z^2+9}\right)$

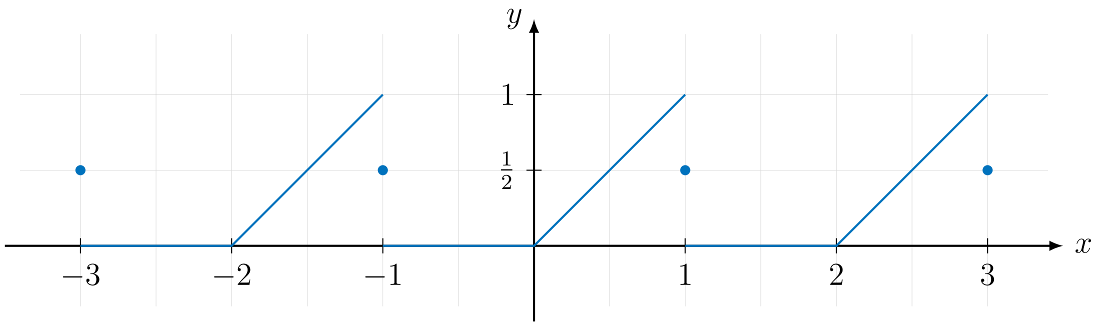
5. (13 Punkte)

a) Gegeben ist die 2-periodische Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x \leq 0 \\ x, & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$$

und $f(x+2) = f(x)$ für $x \in \mathbb{R}$.

i) Skizzieren Sie den Graph von f im Intervall $[-3, 3]$ im folgenden Koordinatensystem.



ii) Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten a_0, a_1 und b_1 der Fourier-Reihe von f.

Lösung: $a_0 = \dfrac{1}{2}$, $a_1 = -\dfrac{2}{\pi^2}$, $b_1 = \dfrac{1}{\pi}$

b) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ■ Falsch Die Fourier-Reihe einer geraden periodischen Funktion ist eine Sinusreihe.

☐ Wahr ■ Falsch Die Wellengleichung $u_{tt} - 5u_{xx} = 0$ ist elliptisch.

6. (8.5 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$u_{tt} = 9u_{xx}, \quad u(x,0) = 2x^2,\ u_t(x,0) = 6e^{2x}.$$

Lösung: $u(x,t) = (x+3t)^2 + (x-3t)^2 + \frac{1}{2}\left(e^{2(x+3t)} - e^{2(x-3t)}\right)$

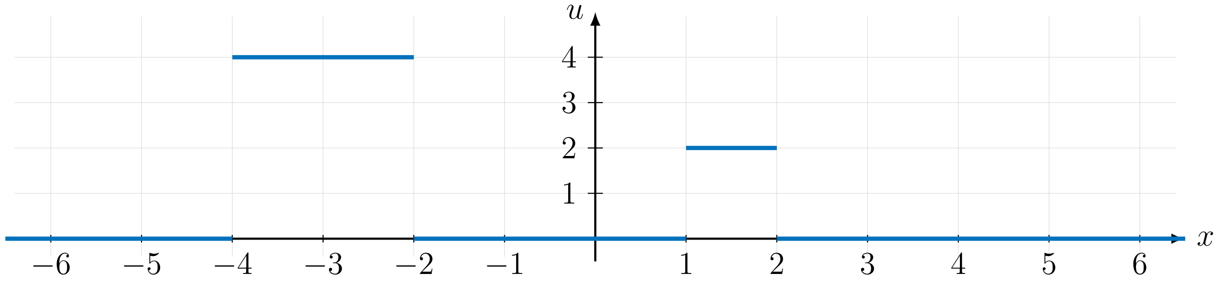
b) Gegeben ist die Wellengleichung

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0$$

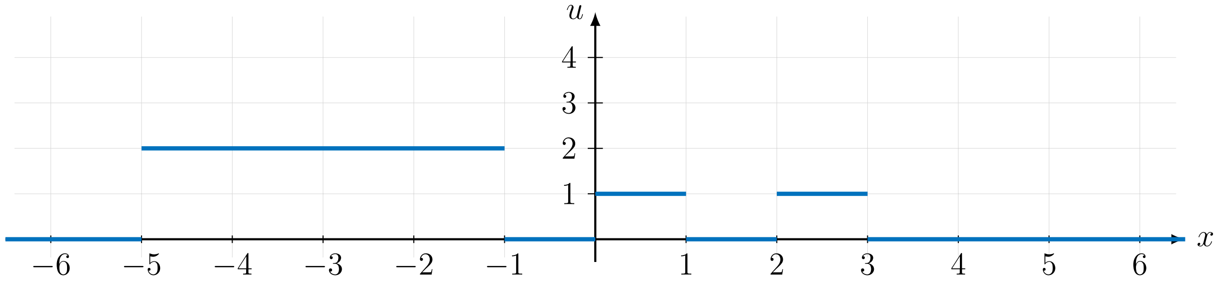
mit den Anfangsbedingungen

$$u_t(x,0) = 0, \quad u(x,0) = \begin{cases} 4, & -4 < x \leq -2, \\ 2, & 1 < x \leq 2, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

i) Skizzieren Sie die Lösung zur Zeit $t = 0$ im folgenden Koordinatensystem.



ii) Skizzieren Sie die Lösung zur Zeit $t = 1$ im folgenden Koordinatensystem.



iii) Skizzieren Sie die Lösung zur Zeit $t = 2$ im folgenden Koordinatensystem.