

Nachname:

Vorname:

Matrikelnummer:

Klausur zu
Höhere Mathematik III
SoSe 2022

Gesamtzahl der Aufgaben: 6, Gesamtpunktzahl: 60, Bearbeitungszeit: 120 Minuten

1. (10.5 Punkte)

a) Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y' = -\frac{1}{3}x(y-1)^2.$$

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = -y + xy^2, \quad y(0) = 2.$$

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Wahr Falsch Die Differentialgleichung $y' = x^2y + 1$ ist linear.

Wahr Falsch Die Differentialgleichung $y' = x^2y + 1$ ist von erster Ordnung.

2. (8 Punkte)

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'' = -\frac{2}{y^5}, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 1.$$

b) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Wahr Falsch Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'' + y = 0$ hat die Form $y(x) = \sin(x) + \cos(x)$.

Wahr Falsch Die Funktion $y(x) = e^x$ ist eine Lösung der linearen Differentialgleichung $(1+x)^2y'' - (x^2+1)y' - 2xy = 0$.

3. (11 Punkte)

a) Wir betrachten das inhomogene lineare System

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{x} & \frac{x+1}{x} \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ xe^x \end{pmatrix}, \quad x > 0.$$

i) Zeigen Sie, dass

$$\mathbf{y}_1(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_2(x) = \begin{pmatrix} x+1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem des zugehörigen homogenen linearen Systems bilden.

ii) Berechnen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems.

b) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Wahr Falsch Eine skalare lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung kann in ein äquivalentes lineares System erster Ordnung umgeschrieben werden.

Wahr Falsch Sind \mathbf{y}_1 und \mathbf{y}_2 Lösungen des inhomogenen Systems $\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{b}(x)$, dann ist auch $\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$ eine Lösung dieses Systems.

4. (9 Punkte) Wir betrachten die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$y''' - 2y' - 4y = \cos(3t)$$

a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

b) Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}[y]$ der Lösung der inhomogenen Differentialgleichung mit den zusätzlichen Anfangsbedingungen

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0.$$

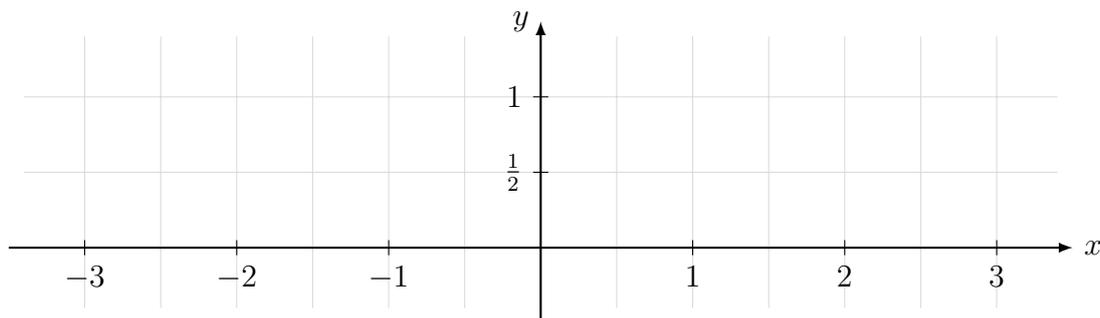
5. (13 Punkte)

a) Gegeben ist die 2-periodische Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x \leq 0 \\ x, & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$$

und $f(x+2) = f(x)$ für $x \in \mathbb{R}$.

i) Skizzieren Sie den Graph von f im Intervall $[-3, 3]$ im folgenden Koordinatensystem.



ii) Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten a_0 , a_1 und b_1 der Fourier-Reihe von f .

b) Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Wahr Falsch Die Fourier-Reihe einer geraden periodischen Funktion ist eine Sinusreihe.

Wahr Falsch Die Wellengleichung $u_{tt} - 5u_{xx} = 0$ ist elliptisch.

6. (8.5 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$u_{tt} = 9u_{xx}, \quad u(x, 0) = 2x^2, \quad u_t(x, 0) = 6e^{2x}.$$

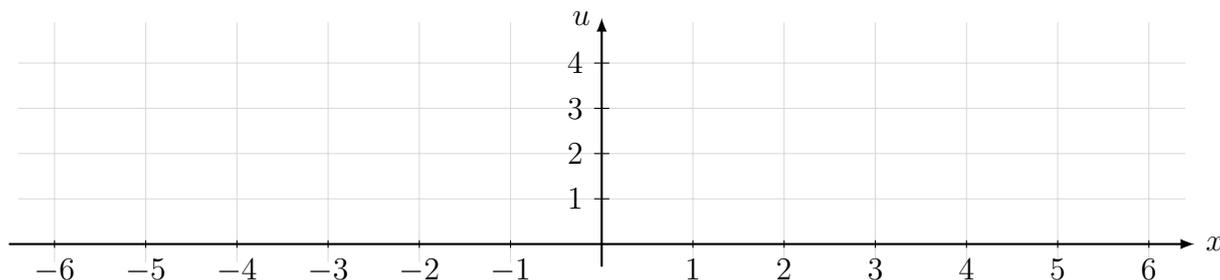
b) Gegeben ist die Wellengleichung

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

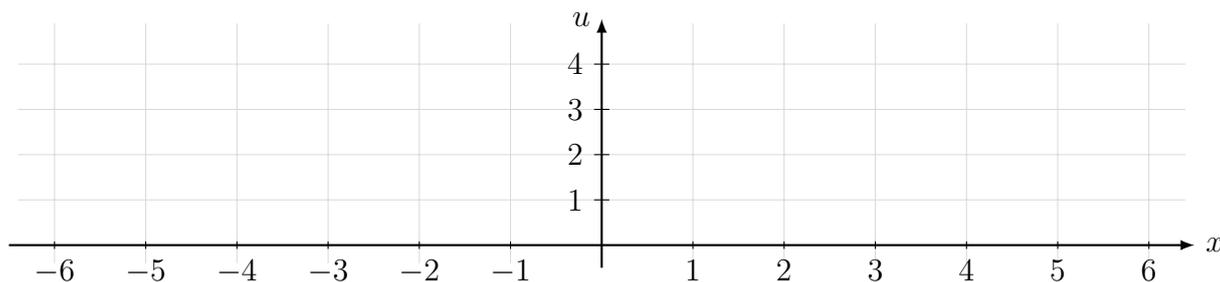
mit den Anfangsbedingungen

$$u_t(x, 0) = 0, \quad u(x, 0) = \begin{cases} 4, & -4 < x \leq -2, \\ 2, & 1 < x \leq 2, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

i) Skizzieren Sie die Lösung zur Zeit $t = 0$ im folgenden Koordinatensystem.



ii) Skizzieren Sie die Lösung zur Zeit $t = 1$ im folgenden Koordinatensystem.



iii) Skizzieren Sie die Lösung zur Zeit $t = 2$ im folgenden Koordinatensystem.

