Klausur zu Höhere Mathematik III WiSe 2022/23

Gesamtzahl der Aufgaben: 6, Gesamtpunktzahl: 60, Bearbeitungszeit: 120 Minuten

1. (12 Punkte)

a) Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y' = 3x^2y + e^{x^3}.$$

Lösung: $y(x) = (x + C)e^{x^3},\ C \in \mathbb{R}.$

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = y^2 - y, \quad y(0) = \frac{1}{2}$$

nach dem Lösungsschema einer Bernoulli-Differentialgleichung.

Lösung: $y(x) = \dfrac{1}{1 + e^x}$

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ■ Falsch Bernoulli-Differentialgleichungen besitzen stets die Lösung $y(x) = 0$.

☐ Wahr ■ Falsch Lineare Differentialgleichungen besitzen stets die Lösung $y(x) = 0$.

2. (7 Punkte)

a) Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix} \boldsymbol{y}, \ \boldsymbol{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

i) Die Funktionen

$$\boldsymbol{y}_1(x) = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}x^2}\cos(x) \\ e^{\frac{1}{2}x^2}\sin(x) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y}_2(x) = \begin{pmatrix} -e^{\frac{1}{2}x^2}\sin(x) \\ e^{\frac{1}{2}x^2}\cos(x) \end{pmatrix}$$

sind Lösungen des zugehörigen homogenen linearen Systems von Differentialgleichungen. Zeigen Sie, dass diese Lösungen linear unabhängig sind.

Lösung: Für die Wronski-Determinante gilt $W(x) = e^{x^2} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

ii) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems.

Lösung:

$$\boldsymbol{y}(x) = 2\begin{pmatrix} -e^{\frac{1}{2}x^2}\sin(x) \\ e^{\frac{1}{2}x^2}\cos(x) \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{y}_2(x)$$

b) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ■ Falsch Sämtliche Lösungen eines Systems von n Differentialgleichungen der Form $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(x)$ ergeben sich aus den Linearkombinationen von n linear unabhängigen Lösungen dieses Systems.

■ Wahr ☐ Falsch Das lineare System von Differentialgleichungen

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}$$

besitzt die allgemeine Lösung $\boldsymbol{y}(x) = \begin{pmatrix} c_1 e^{x} \\ c_2 e^{2x} \\ c_3 e^{3x} \end{pmatrix}$ mit $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

3. (14 Punkte)

a) Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y'' - \left(4 + \frac{2}{x}\right) y' + \left(4 + \frac{4}{x}\right) y = 0.$$

i) Zeigen Sie, dass die Funktion $y_1(x) = e^{2x}$ eine Lösung der obigen Differentialgleichung ist.

Lösung: Einsetzen von $y_1(x),\ y_1'(x) = 2e^{2x}, y_1''(x) = 4e^{2x}$ in die Differentialgleichung.

ii) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung mit Hilfe des Reduktionsverfahrens von d'Alembert.

Lösung: $y(x) = c_1e^{2x} + c_2x^3e^{2x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

b) Gegeben ist die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = \frac{x-1}{x}, \quad x > 1\,.$$

Ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen linearen Differentialgleichung ist gegeben durch $y_1(x) = e^x,\ y_2(x) = -x$. Die Inverse der Fundamentalmatrix ist

$$\boldsymbol{Y}^{-1} = \frac{1}{x-1}\begin{pmatrix} -e^{-x} & xe^{-x} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

Lösung: $y(x) = c_1e^x - c_2x - 1 - x\ln(x),\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

4. (7 Punkte)

a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der homogenen linearen Differentialgleichung

$$y'' - 4y' - 5y = 0\,.$$

Es soll nicht nachgewiesen werden, dass es sich um ein Fundamentalsystem handelt.

Lösung: Ein Fundamentalsystem ist gegeben durch $y_1(x) = e^{-x},\ y_2(x) = e^{5x}$.

b) Geben Sie für die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$y'' + 2y' + y = xe^{-x}$$

einen Ansatz an zur Bestimmung einer speziellen Lösung y_p.

Die konkrete Berechnung von y_p ist nicht erforderlich.

Lösung: $y_p(x) = (Ax + B)x^2 e^{-x}$

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr ☐ Falsch Ist $P(\lambda) = (\lambda^2 + 1)^2$ das charakteristische Polynom einer homogenen linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, so bilden $y_1(x) = \sin(x), y_2(x) = \cos(x), y_3(x) = x\sin(x)$ und $y_4(x) = x\cos(x)$ ein Fundamentalsystem dieser Differentialgleichung.

☐ Wahr ■ Falsch Für den Ansatz zur Bestimmung einer speziellen Lösung der Differentialgleichung $y'' + 2y' - y = x^2\sin(x)$ muss der Resonanzfall gewählt werden.

5. (7 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte $\mathscr{L}[y]$ der Lösung der Anfangswertproblems

$$y''(t) - 5y'(t) + 3y(t) = 2e^{-5t},\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$$

Lösung: $\mathscr{L}[y] = \dfrac{1}{z^2 - 5z + 3}\left(z - 3 + \dfrac{2}{z+5}\right)$

b) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ■ Falsch Die Laplace-Transformierte $\mathscr{L}[f]$ einer Funktion f existiert nur, wenn f stetig ist.

■ Wahr ☐ Falsch Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{z^2+1}{(z-1)(z+2)^2}$$

lautet

$$\frac{z^2+1}{(z-1)(z+2)^2} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+2} + \frac{C}{(z+2)^2}\,.$$

6. (13 Punkte)

a) Bestimmen Sie den Typ der partiellen Differentialgleichung

$$5u_{xx} - 10u_{xy} + 5u_{yy} + (1-x)u_x + u = x + 2\,.$$

Lösung: Die Differentialgleichung ist parabolisch.

b) Berechnen Sie die Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$u_t(x,t) = 2u_{xx}(x,t) \text{ für } (x,t) \in (0,\pi) \times \mathbb{R}^+$$

mit Anfangsbedingung

$$u(x,0) = \pi - x + 3\sin(5x), \quad x \in [0,\pi]$$

und Randbedingungen

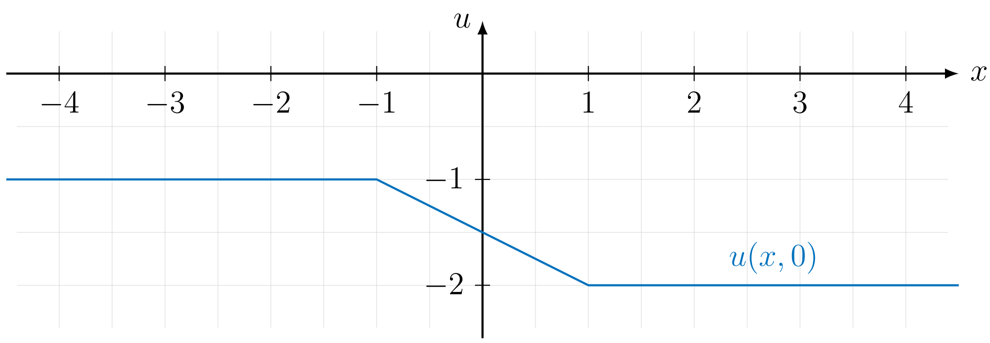
$$u(0,t) = \pi, \qquad u(\pi,t) = 0, \quad t \geq 0,$$

Lösung: $u(x,t) = \pi - x + 3\sin(5x)e^{-50t}$

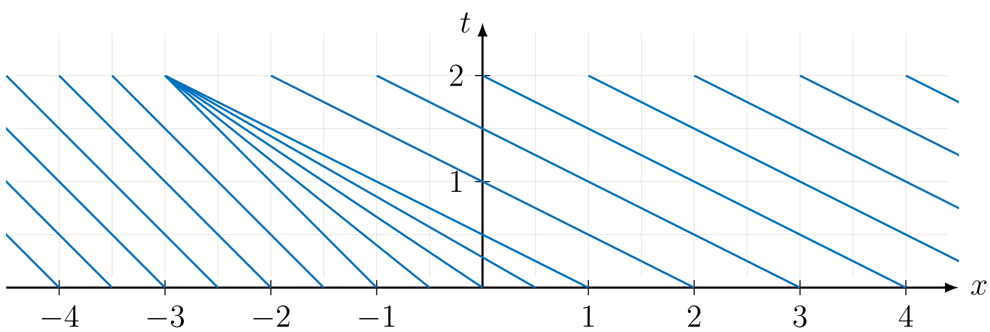
c) Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$u_t + uu_x = 0, \quad u(x,0) = \begin{cases} -1, & x \leq -1, \\ -\frac{x}{2} - \frac{3}{2}, & -1 < x < 1, \\ -2, & x \geq 1. \end{cases}.$$

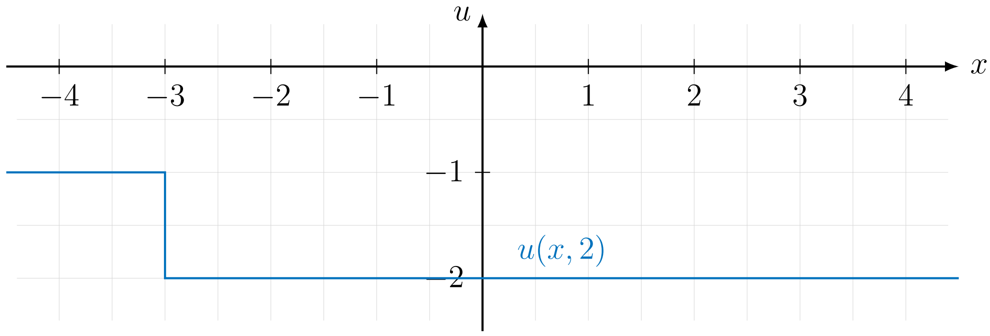
i) Zeichnen Sie die Anfangsbedingung $u(x,0)$ in das folgende Koordinatensystem.



ii) Skizzieren Sie die zugehörigen Charakteristiken bis zur Zeit $t = 2$ im folgenden Koordinatensystem.



iii) Zeichnen Sie die Lösung zur Zeit $t = 2$ in das folgende Koordinatensystem.



iv) Berechnen Sie die Geschwindigkeit der ab der Zeit $t = 2$ auftretenden Sprungunstetigkeit.

Lösung: $s = \frac{u_L + u_R}{2} = -\frac{3}{2}$

d) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort $+1$ Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr ☐ Falsch Die Wellengleichung ist hyperbolisch.

■ Wahr ☐ Falsch Bei der linearen Transportgleichung hängt die Steigung der Charakteristiken nur von der Transportgeschwindigkeit ab.

☐ Wahr ■ Falsch Die Koeffizienten der Fourier-Reihe einer geraden 10π-periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind gegeben durch

$$a_k = \frac{1}{10\pi} \int_0^{10\pi} f(x) \cos\left(\frac{kx}{5}\right) dx,\ b_k = 0.$$