Klausur zu Höhere Mathematik III SoSe 2023

Gesamtzahl der Aufgaben: 6, Gesamtpunktzahl: 50, Bearbeitungszeit: 120 Minuten

1. (9 Punkte)

   a) Berechnen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

   $$y' = -\frac{y}{x} + x^2 + 4, \quad x > 0.$$

   Lösung: $y(x) = \frac{C}{x} + \frac{x^3}{4} + 2x,\ C \in \mathbb{R}, \quad x > 0.$

   b) Führen Sie die Differentialgleichung

   $$y' = 2(x - 3y)e^{x-3y}$$

   mit Hilfe einer geeigneten Substitution auf eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen zurück.

   Sie müssen diese Differentialgleichung **nicht** lösen.

   Lösung: $z(x) = x - 3y, \quad z' = 1 - 6ze^z$

   c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

   Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

   ■ Wahr ☐ Falsch — Eine homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung besitzt stets die Lösung $y(x) = 0$.

   ☐ Wahr ■ Falsch — Die Differentialgleichung

   $$y'' + y' = xy^2$$

   ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

2. (8 Punkte) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'' = 2e^y,\ y(0) = -2,\ y'(0) = \frac{2}{e}\,.$$

Lösung: $y(x) = -2\ln(-x + e)$

3. (8.5 Punkte)

a) Gegeben ist das inhomogene lineare Differentialgleichungssystem

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} e^x \\ e^{2x} \end{pmatrix}.$$

Ein Fundamentalsystem des zugehörigen homogenen Systems ist gegeben durch

$$\boldsymbol{y}_1(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{y}_2(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} \\ -e^{-x} \end{pmatrix}.$$

i) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der obigen inhomogen Differentialgleichung.

Lösung: $y(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)e^x + \frac{1}{3}e^{2x} + c_1 e^x + c_2 e^{-x} \\ \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)e^x + \frac{2}{3}e^{2x} + c_1 e^x - c_2 e^{-x} \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

ii) Lösen Sie das durch die obige inhomogene Differentialgleichung und die Anfangsdaten

$$\boldsymbol{y}(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

gegebene Anfangswertproblem.

Lösung: $y(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}xe^x - \frac{1}{4}e^x + \frac{1}{3}e^{2x} + \frac{1}{6}e^{-x} \\ \frac{1}{2}xe^x - \frac{3}{4}e^x + \frac{2}{3}e^{2x} - \frac{1}{6}e^{-x} \end{pmatrix}$

b) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr ☐ Falsch Das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= e^x y_1 + \cos(x) y_2 \\ y_2' &= x y_1 + y_2 + \sin(x) \end{aligned}$$

ist inhomogen linear.

■ Wahr ☐ Falsch Ist $\boldsymbol{y}_p$ eine partikuläre Lösung des inhomogenen linearen Systems

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(x)$$

und ist $\boldsymbol{y}_h$ eine Lösung von

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y},$$

so ist auch $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_p - \boldsymbol{y}_h$ eine partikuläre Lösung des inhomogenen linearen Systems.

4. (8 Punkte)

a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der homogenen linearen Differentialgleichung

$$y'' - 2y' + 2y = 0\,.$$

Es soll **nicht** nachgewiesen werden, dass es sich um ein Fundamentalsystem handelt.

Lösung: Ein Fundamentalsystem ist gegeben durch $y_1(x) = e^x \sin(x),\; y_2(x) = e^x \cos(x)$.

b) Geben Sie für die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$y'' + 2y' + y = e^{-x}\sin(x)$$

einen Ansatz an zur Bestimmung einer speziellen Lösung y_p.

Die konkrete Berechnung von y_p ist **nicht** erforderlich.

Lösung: $y_p(x) = Ae^{-x}\sin(x) + Be^{-x}\cos(x)$

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort −1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ■ Falsch Ist $P(\lambda) = (\lambda^2+1)(\lambda^2-1)$ das charakteristische Polynom einer homogenen linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, so ist die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung gegeben durch

$$y(x) = c_1\left(\sin(x)+\cos(x)\right) + c_2\left(e^x + e^{-x}\right),\; c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

■ Wahr ☐ Falsch Für den Ansatz zur Bestimmung einer speziellen Lösung der Differentialgleichung $y'' + y = x^2\cos(x)$ muss der Resonanzfall gewählt werden.

5. (6.5 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte $\mathscr{L}[y]$ der Lösung des Anfangswertproblems

$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = te^{-3t},\ y(0) = 5,\ y'(0) = -2.$$

Lösung: $\mathscr{L}[y] = \frac{1}{z^2+z-2}\left(5z + 3 + \frac{1}{(z+3)^2}\right)$

b) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr ☐ Falsch Die Originalfunktion $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(z)]$ der Laplace-Transformierten

$$F(z) = \frac{z+1}{z^2+1}$$

ist gegeben durch

$$f(t) = \sin(t) + \cos(t)\,.$$

☐ Wahr ■ Falsch Die Fourier-Koeffizienten einer Funktion f können nur berechnet werden, wenn f stetig ist.

■ Wahr ☐ Falsch Die Fourier-Reihe einer geraden periodischen Funktion ist eine reine Cosinusreihe.

6. (10 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$u_{tt} = 4u_{xx}, \quad u(x,0) = 2x^3, \; u_t(x,0) = 4e^x.$$

Lösung: $u(x,t) = (x+2t)^3 + (x-2t)^3 + e^{x+2t} - e^{x-2t}$

b) Bestimmen Sie die Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$u_t(x,t) = 4u_{xx}(x,t) \text{ für } (x,t) \in (0,2\pi) \times \mathbb{R}^+$$

mit Anfangsbedingung

$$u(x,0) = \frac{x}{2} + \sin\left(\frac{x}{2}\right) - \sin(2x), \quad x \in [0,2\pi]$$

und Randbedingungen

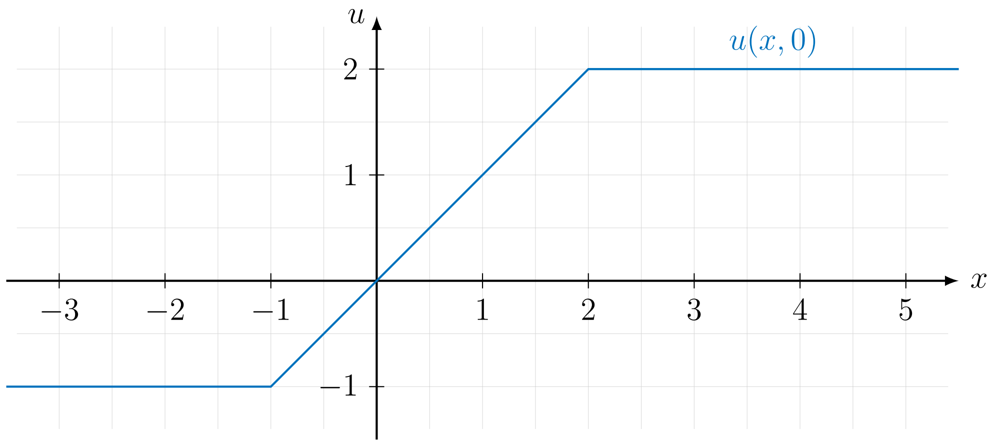
$$u(0,t) = 0, \qquad u(2\pi,t) = \pi, \quad t \geq 0.$$

Lösung: $u(x,t) = \frac{x}{2} + \sin\left(\frac{x}{2}\right) e^{-t} - \sin(2x)e^{-16t}$

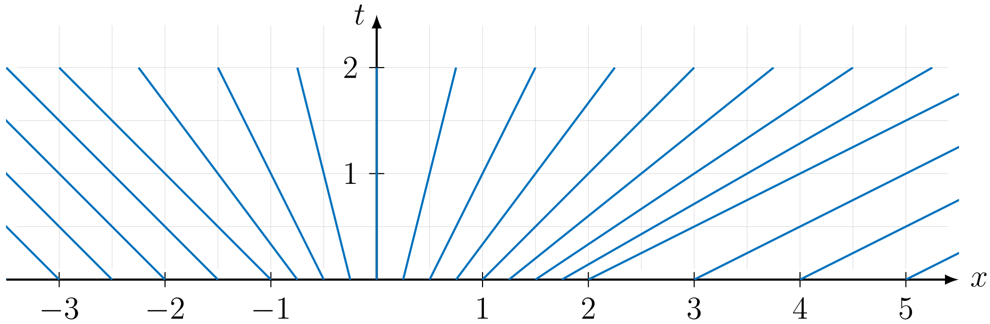
c) Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$u_t + uu_x = 0, \quad u(x,0) = \begin{cases} -1, & x \leq -1, \\ x, & -1 < x < 2, \\ 2, & x \geq 2. \end{cases}$$

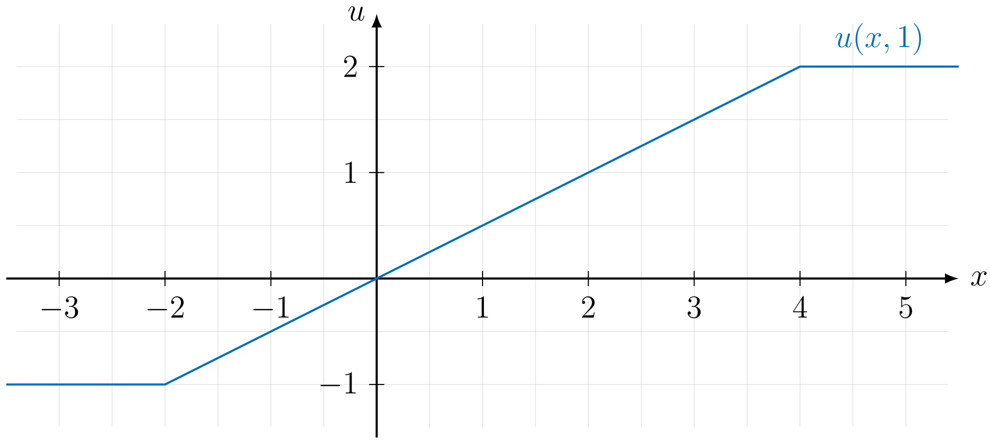
i) Zeichnen Sie die Anfangsbedingung $u(x,0)$ in das folgende Koordinatensystem.



ii) Skizzieren Sie die zugehörigen Charakteristiken bis zur Zeit $t = 2$ im folgenden Koordinatensystem.



iii) Zeichnen Sie die Lösung zur Zeit $t = 1$ in das folgende Koordinatensystem.



d) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort −1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr ☐ Falsch Die Wärmeleitungsgleichung ist parabolisch.

■ Wahr ☐ Falsch Anfangswertprobleme der Form

$$\partial_t u(x,t) + \partial_x f(u(x,t)) = 0 \text{ für } (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$$
$$u(x,0) = u_0(x)$$

können unstetige Lösungen besitzen, selbst wenn $u_0(x)$ stetig ist.