

Nachname:

Vorname:

Matrikelnummer:

Klausur zu
Höhere Mathematik III
SoSe 2023

Gesamtzahl der Aufgaben: 6, Gesamtpunktzahl: 50, Bearbeitungszeit: 120 Minuten

1. (9 Punkte)

a) Berechnen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = -\frac{y}{x} + x^2 + 4, \quad x > 0.$$

b) Führen Sie die Differentialgleichung

$$y' = 2(x - 3y)e^{x-3y}$$

mit Hilfe einer geeigneten Substitution auf eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen zurück.

Sie müssen diese Differentialgleichung **nicht** lösen.

c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☐ Falsch Eine homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung besitzt stets die Lösung $y(x) = 0$.

☐ Wahr ☐ Falsch Die Differentialgleichung

$$y'' + y' = xy^2$$

ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

2. (8 Punkte) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'' = 2e^y, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = \frac{2}{e}.$$

3. (8.5 Punkte)

a) Gegeben ist das inhomogene lineare Differentialgleichungssystem

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} e^x \\ e^{2x} \end{pmatrix}.$$

Ein Fundamentalsystem des zugehörigen homogenen Systems ist gegeben durch

$$\mathbf{y}_1(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_2(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} \\ -e^{-x} \end{pmatrix}.$$

- i) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der obigen inhomogenen Differentialgleichung.
ii) Lösen Sie das durch die obige inhomogene Differentialgleichung und die Anfangsdaten

$$\mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

gegebene Anfangswertproblem.

- b) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☐ Falsch Das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= e^x y_1 + \cos(x) y_2 \\ y_2' &= x y_1 + y_2 + \sin(x) \end{aligned}$$

ist inhomogen linear.

☐ Wahr ☐ Falsch Ist $\mathbf{y}_p$ eine partikuläre Lösung des inhomogenen linearen Systems

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{b}(x)$$

und ist $\mathbf{y}_h$ eine Lösung von

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y},$$

so ist auch $\mathbf{y} = \mathbf{y}_p - \mathbf{y}_h$ eine partikuläre Lösung des inhomogenen linearen Systems.

4. (8 Punkte)

- a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der homogenen linearen Differentialgleichung

$$y'' - 2y' + 2y = 0.$$

Es soll **nicht** nachgewiesen werden, dass es sich um ein Fundamentalsystem handelt.

- b) Geben Sie für die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$y'' + 2y' + y = e^{-x} \sin(x)$$

einen Ansatz an zur Bestimmung einer speziellen Lösung y_p .

Die konkrete Berechnung von y_p ist **nicht** erforderlich.

- c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☐ Falsch Ist $P(\lambda) = (\lambda^2 + 1)(\lambda^2 - 1)$ das charakteristische Polynom einer homogenen linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, so ist die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung gegeben durch

$$y(x) = c_1 (\sin(x) + \cos(x)) + c_2 (e^x + e^{-x}), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

☐ Wahr ☐ Falsch Für den Ansatz zur Bestimmung einer speziellen Lösung der Differentialgleichung $y'' + y = x^2 \cos(x)$ muss der Resonanzfall gewählt werden.

5. (6.5 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}[y]$ der Lösung des Anfangswertproblems

$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = te^{-3t}, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = -2.$$

b) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☐ Falsch Die Originalfunktion $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(z)]$ der Laplace-Transformierten

$$F(z) = \frac{z+1}{z^2+1}$$

ist gegeben durch

$$f(t) = \sin(t) + \cos(t).$$

☐ Wahr ☐ Falsch Die Fourier-Koeffizienten einer Funktion f können nur berechnet werden, wenn f stetig ist.

☐ Wahr ☐ Falsch Die Fourier-Reihe einer geraden periodischen Funktion ist eine reine Cosinusreihe.

6. (10 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$u_{tt} = 4u_{xx}, \quad u(x, 0) = 2x^3, \quad u_t(x, 0) = 4e^x.$$

b) Bestimmen Sie die Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$u_t(x, t) = 4u_{xx}(x, t) \text{ für } (x, t) \in (0, 2\pi) \times \mathbb{R}^+$$

mit Anfangsbedingung

$$u(x, 0) = \frac{x}{2} + \sin\left(\frac{x}{2}\right) - \sin(2x), \quad x \in [0, 2\pi]$$

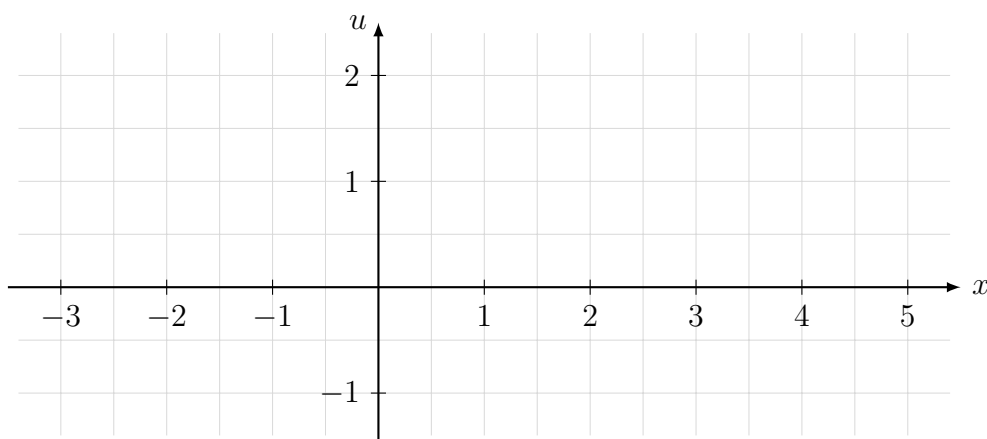
und Randbedingungen

$$u(0, t) = 0, \quad u(2\pi, t) = \pi, \quad t \geq 0.$$

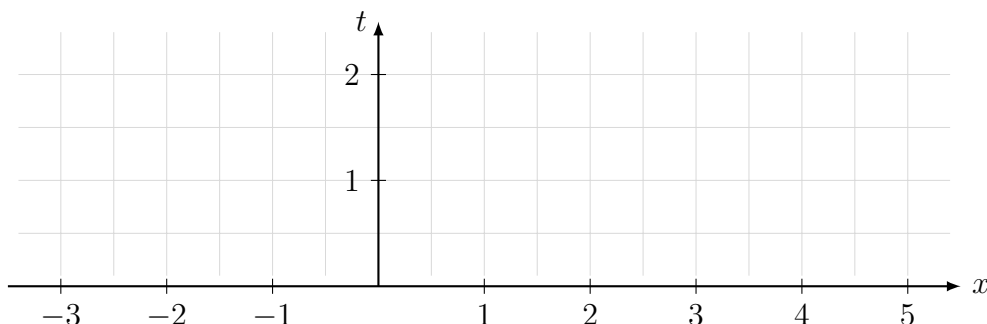
c) Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$u_t + uu_x = 0, \quad u(x, 0) = \begin{cases} -1, & x \leq -1, \\ x, & -1 < x < 2, \\ 2, & x \geq 2. \end{cases}$$

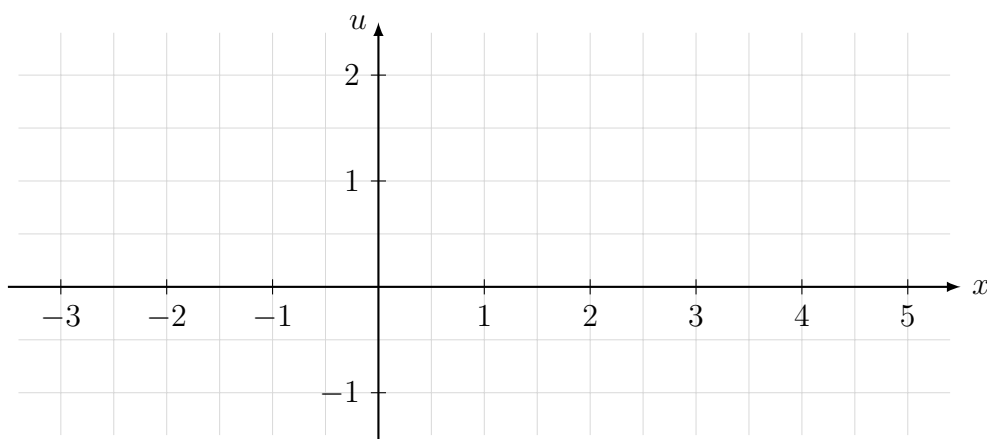
- i) Zeichnen Sie die Anfangsbedingung $u(x, 0)$ in das folgende Koordinatensystem.



- ii) Skizzieren Sie die zugehörigen Charakteristiken bis zur Zeit $t = 2$ im folgenden Koordinatensystem.



- iii) Zeichnen Sie die Lösung zur Zeit $t = 1$ in das folgende Koordinatensystem.



- d) Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort -1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☐ Falsch Die Wärmeleitungsgleichung ist parabolisch.

☐ Wahr ☐ Falsch Anfangswertprobleme der Form

$$\begin{aligned}\partial_t u(x, t) + \partial_x f(u(x, t)) &= 0 \text{ für } (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ \\ u(x, 0) &= u_0(x)\end{aligned}$$

können unstetige Lösungen besitzen, selbst wenn $u_0(x)$ stetig ist.