Klausur zu
Höhere Mathematik III
WiSe 2023

Gesamtzahl der Aufgaben: 6, Gesamtpunktzahl: 60, Bearbeitungszeit: 120 Minuten

1. (11 Punkte)

   a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = (x^2+1)e^y, \quad y(0) = -1.$$

Lösung: $y(x) = -\ln(e - \frac{x^3}{3} - x)$.

   b) Berechnen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = (x+2y+3)^2 - \frac{1}{2}.$$

Lösung: $y(x) = -\frac{1}{2}(x+3)$ und $y(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2x+c} + x + 3\right)$

   c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

   Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

   ☐ Wahr ■ Falsch Die Differentialgleichung $y' = x$ hat eine eindeutige Lösung.

   ☐ Wahr ■ Falsch Die Gleichung $y' = yx + x^2$ ist eine Bernoulli-Differentialgleichung.

2. (7 Punkte)

a) Berechnen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y'' = -\frac{2}{x}y' + \frac{1}{x^2}, \quad x > 0.$$

Lösung: $y(x) = \ln(x) - \frac{c_1}{x} + c_2$

b) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr ☐ Falsch Eine Differentialgleichung der Form $y'' = f(x, y, y')$ kann stets in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung überführt werden.

■ Wahr ☐ Falsch Bei einer Differentialgleichung dritter Ordnung müssen drei Anfangsbedingungen vorgegeben werden, um eine eindeutige Lösung erhalten zu können.

3. (8 Punkte)

a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen linearen Differentialgleichungssystems

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} -x & 1 \\ 1-x^2 & x \end{pmatrix} \boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} 2x \\ 2x^2 \end{pmatrix}.$$

Ein Fundamentalsystem des zugehörigen homogenen Systems ist gegeben durch

$$\boldsymbol{y}_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}, \; \boldsymbol{y}_2(x) = \begin{pmatrix} x \\ 1+x^2 \end{pmatrix}.$$

Lösung: $y(x) = \begin{pmatrix} x^2 + c_1 + c_2 x \\ x^3 + c_1 x + c_2(1+x^2) \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

b) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

■ Wahr ☐ Falsch Das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= e^x y_1 + 3y_2 \\ y_2' &= x y_1 + y_2 \end{aligned}$$

ist homogen linear.

■ Wahr ☐ Falsch Ist $\boldsymbol{y}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ eine komplexwertige Lösung des linearen Systems $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ mit $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, dann sind Real- und Imaginärteil von $\boldsymbol{y}$ zwei reellwertige Lösungen dieses Systems.

4. (12.5 Punkte)

a) Gegeben ist die homogene lineare Differentialgleichung

$$y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{6}{x^2}y = 0, \qquad x > 0.$$

Die Funktionen $y_1(x) = x^2$ und $y_2(x) = x^{-3}$ bilden ein zugehöriges Fundamentalsystem.

i) Zeigen Sie, dass y_1 und y_2 tatsächlich linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung sind.

Lösung: $y_1'(x) = 2x$, $y_1''(x) = 2$, $y_2'(x) = -3x^{-4}$, $y_2''(x) = 12x^{-5}$, $\det \boldsymbol{Y}(x) = -5x^{-2} \neq 0$

ii) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung, die den Anfangsbedingungen $y(2) = 1$ und $y'(2) = 6$ genügt.

Lösung: $y(x) = \frac{3}{4}x^2 - 16x^{-3}$

b) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ■ Falsch Der Ansatz für eine partikuläre Lösung der skalaren Differentialgleichung $y'' + 2y' + 3y = x^2 e^x$ ist $y_p(x) = Ax^2 e^x$.

■ Wahr ☐ Falsch Eine Lösung der Differentialgleichung $y'' + (x^2 - 1)y' - x^2 y = 0$ ist $y(x) = e^x$.

5. (10 Punkte)

Berechnen Sie mit Hilfe der Laplace-Transformation die Lösung des Anfangswertproblems

$$y''(t) - y'(t) = 2e^t, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = -1.$$

Lösung: $y(t) = 3 - 3e^t + 2te^t$

6. (11.5 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$u_t(x,t) = 8u_{xx}(x,t) \text{ für } (x,t) \in (0,2) \times \mathbb{R}^+$$

mit Anfangsbedingung

$$u(x,0) = x, \quad x \in (0,2)$$

und Randbedingungen

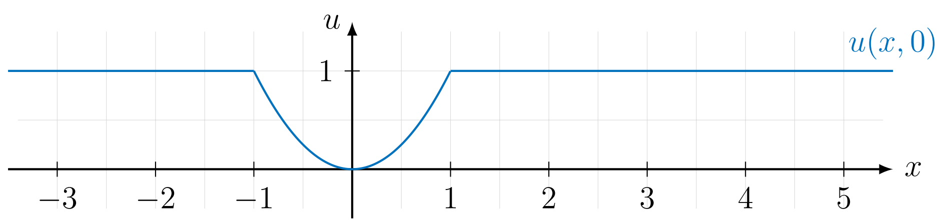
$$u(0,t) = 0, \qquad u(2,t) = 0, \quad t \geq 0,$$

Lösung: $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-4}{k\pi}(-1)^k \sin(k\pi x/2) e^{-2k^2\pi^2 t}$

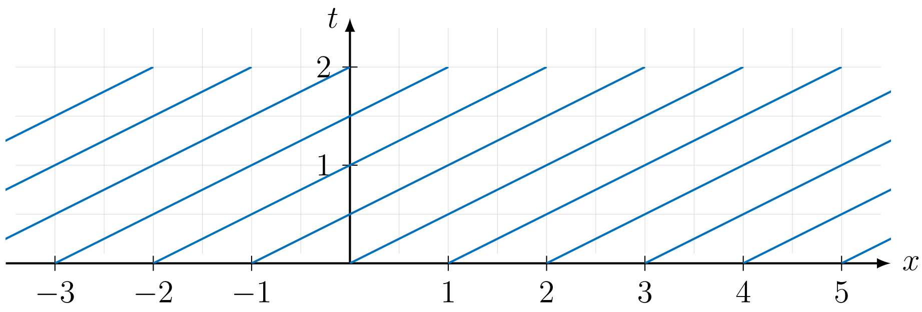
b) Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$u_t + 2u_x = 0, \quad u(x,0) = \begin{cases} 1, & x \leq -1, \\ x^2, & -1 < x < 1, \\ 1, & 1 \leq x. \end{cases}$$

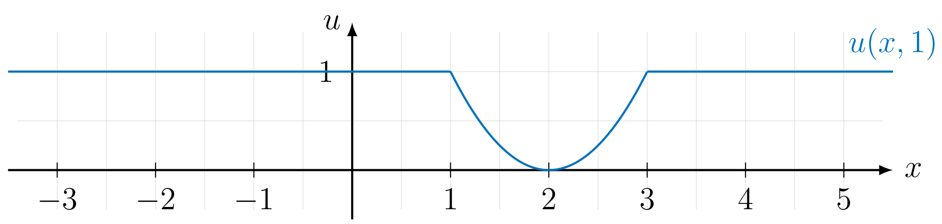
i) Zeichnen Sie die Anfangsbedingung $u(x,0)$ in das folgende Koordinatensystem.



ii) Skizzieren Sie die zugehörigen Charakteristiken bis zur Zeit $t = 2$ im folgenden Koordinatensystem.



iii) Zeichnen Sie die Lösung zur Zeit $t = 1$ in das folgende Koordinatensystem.



c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ■ Falsch Die Laplace-Gleichung ist parabolisch.

■ Wahr ☐ Falsch Die Charakteristiken der Burgersgleichung sind Geraden in der (x, t)-Ebene.