Nachname:
Vorname:
Matrikelnummer:

Klausur zu
Höhere Mathematik III
SoSe 2024

Gesamtzahl der Aufgaben: 6, Gesamtpunktzahl: 60, Bearbeitungszeit: 120 Minuten

1. (10 Punkte)
   a) Berechnen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung
   $$y' = \frac{y}{2x} + \frac{1}{2}, \quad x > 0.$$
   b) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems
   $$y' = \frac{1}{(\frac{y}{x})^2} + \frac{y}{x}, \quad y(e) = 0.$$
   c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort −1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

   Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

   ☐ Wahr ☐ Falsch $y' = x^2y + xy^{-2}$ ist eine Bernoulli-Differentialgleichung.

   ☐ Wahr ☐ Falsch Die Differentialgleichung $y' = x^2(y^2 + y + 1)$ ist von zweiter Ordnung.

2. (10.5 Punkte)
   a) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems
   $$y'' = -\frac{1}{y^3}, \quad y(0) = 1, \ y'(0) = 1.$$
   b) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung
   $$y''' + 4y' = 0.$$
   c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort −1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

   Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

   ☐ Wahr ☐ Falsch Eine Differentialgleichung der Form $y'' = f(x, y')$ kann durch die Substitution $z = y'$ in eine Differentialgleichung erster Ordnung für z überführt werden.

   ☐ Wahr ☐ Falsch Eine Differentialgleichung zweiter Ordnung kann stets in ein äquivalentes System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung umgeformt werden.

3. (12 Punkte)

Gegeben sind das inhomogene lineare Differentialgleichungssystem

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & -1 \\ \frac{1}{x^2} & \frac{2}{x} \end{pmatrix} \boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} x^2 \\ -x \end{pmatrix}, \quad x > 0$$

und die Funktionen

$$\boldsymbol{y}_1(x) = \begin{pmatrix} x^2 \\ -x \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y}_2(x) = \begin{pmatrix} -x^2 \ln(x) \\ x + x\ln(x) \end{pmatrix}, \quad x > 0.$$

a) Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{y}_1$ und $\boldsymbol{y}_2$ ein Fundamentalsystem des zugehörigen homogenen Systems bilden.

b) Berechnen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems.

4. (12 Punkte)

a) Lösen Sie mit der Laplace-Transformation das Anfangswertproblem

$$y'' + y' - 2y = 6e^{-t}, \qquad y(0) = y'(0) = 0.$$

b) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort* $+1$ *Punkt(e), jede fehlende Antwort* 0 *Punkte, jede falsche Antwort* -1 *Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☐ Falsch Eine Lösung der Differentialgleichung $y''' - 2y' + y = e^x$ ist $y(x) = e^x$.

☐ Wahr ☐ Falsch Für den Ansatz zur Bestimmung einer speziellen Lösung der Differentialgleichung $y'' - y = x\sin(x)$ muss der Resonanzfall gewählt werden.

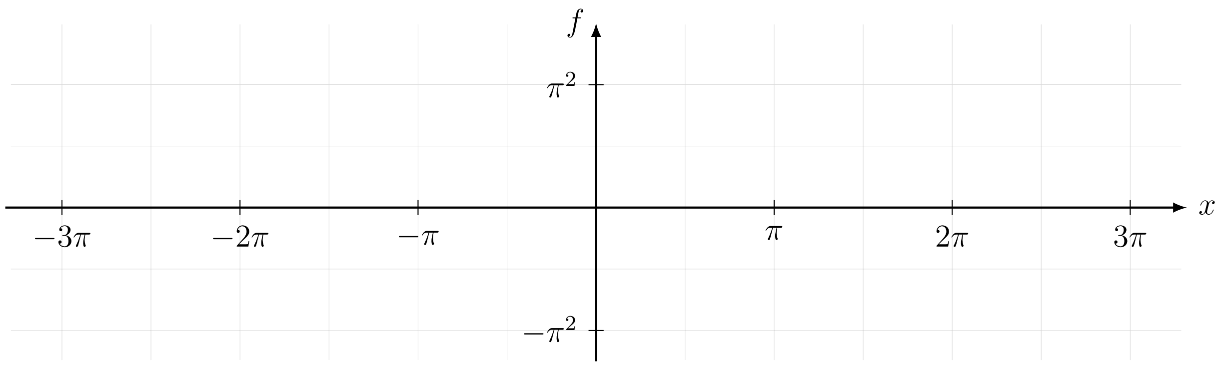
5. (7 Punkte)

Gegeben ist die 2π-periodische Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x^2 - \pi^2, \quad x \in [-\pi, \pi]$$

und $f(x + 2\pi) = f(x)$ für $x \in \mathbb{R}$.

a) Zeichnen Sie den Graphen von f im Intervall $[-3\pi, 3\pi]$ in das folgende Koordinatensystem.



b) Berechnen Sie die Koeffizienten a_0, a_1 und b_1 der zugehörigen Fourier-Reihe

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx).$$

6. (8.5 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

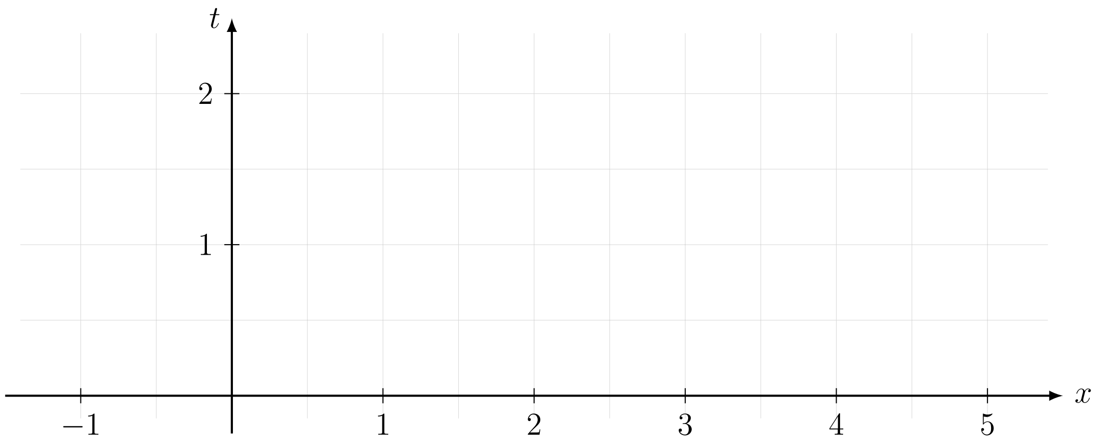
$$u_{tt} - 4u_{xx} = 0, \quad u(x,0) = x^2,\ u_t(x,0) = -4x.$$

Vereinfachen Sie die Lösung so weit wie möglich.

b) Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$u_t + uu_x = 0, \quad u(x,0) = 2^x.$$

Skizzieren Sie den Verlauf der Charakteristiken durch $(x_0, 0)$ für $x_0 = -1$, $x_0 = 0$ sowie $x_0 = 1$ und bestimmen Sie mithilfe der Charakteristiken den Lösungswert $u(5, 2)$.



c) *Bei dieser Ankreuzaufgabe ergibt jede korrekte Antwort +1 Punkt(e), jede fehlende Antwort 0 Punkte, jede falsche Antwort −1 Punkt(e). Sollte diese Punktesumme negativ ausfallen, so wird sie gleich Null gesetzt.*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

☐ Wahr ☐ Falsch Die Differentialgleichung $u_{xx} + u_{tt} = 0$ ist elliptisch.

☐ Wahr ☐ Falsch Die Charakteristiken einer linearen Transportgleichung $u_t + au_x = 0$, $a \neq 0$ sind stets parallele Geraden in der (x, t)-Ebene.